

Gautier, Delphin
Mesure des angles

MESURE DES ANGLES.

HYPERBOLES ÉTOILÉES

ET

DÉVELOPPANTE,

Par le Commandant D. GAUTIER,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

« Sitôt qu'il apparaît au monde une vérité nouvelle, on » s'y oppose le plus longtemps possible, et on résiste même » quand on est presque convaincu. » (SCHOPENHAUER.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1911



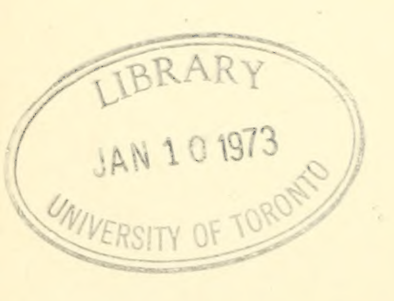
MESURE DES ANGLES.

HYPERBOLES ÉTOILÉES

ET

DÉVELOPPANTE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
47700 quai des Grands-Augustins, 55



MESURE DES ANGLES.

HYPERBOLES ÉTOILÉES

ET

DÉVELOPPANTE,

Par le Commandant D. GAUTIER,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

« Sitôt qu'il apparaît au monde une vérité nouvelle, on
» s'y oppose le plus longtemps possible, et on résiste même
» quand on est presque convaincu. » (SCHOPENHAUER.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

MESURE DES ANGLES.

HYPERBOLES ÉTOILÉES

ET

DÉVELOPPANTE.

AVANT-PROPOS.

Depuis les temps les plus reculés, trois problèmes ont attiré l'attention des géomètres, sans qu'on soit parvenu à leur donner une solution graphique. Ces problèmes, pour lesquels on a dû recourir au calcul, sont la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle.

Il faut reconnaître que, pour les deux premiers, il paraît superflu de faire d'autres recherches. Car, en pratique, peu importe que le nombre π ou une de ses puissances soient commensurables, puisque nous pouvons le connaître avec l'approximation que nous voulons; peu importe qu'aucune épure usuelle ne nous permette de construire une racine cubique, puisque nous pouvons extraire cette racine par le calcul avec toute la précision nécessaire. Une instruction, même élémentaire, permet à tous de résoudre immédiatement une formule dans laquelle entre en facteurs le nombre π ou une racine cubique.

Il n'en est pas de même de la trisection, ou, pour

mieux dire, de la division et de la comparaison des angles.

Remarquons en effet, avant toute autre considération, que les géomètres ont mal posé le problème. Ainsi que l'auteur le faisait remarquer dans la première édition de cet Ouvrage, si la trisection avait été trouvée, il aurait fallu chercher la division par 5, puis par 7, ce qui aurait éternisé le problème en le rendant toujours plus difficile.

A ce point de vue, il est peut-être fâcheux qu'on ait découvert trop tôt les belles relations qui existent entre l'angle et le cercle et qui permettent, en particulier, de construire la bissectrice. Les géomètres en ont déduit que l'étude de l'angle était inséparable de celle de la circonférence, et c'est sans doute cette erreur qui les a amenés à conclure que la précision dans les tracés graphiques ne pourrait être obtenue que par la règle et le compas.

L'histoire des Mathématiques a enregistré bien des illusions semblables. C'est ainsi que, fatigués des recherches infructueuses sur la quadrature du cercle, les savants en étaient arrivés à croire qu'un espace limité par des lignes droites ne pouvait être équivalent à une surface terminée par des lignes courbes. Il fallut qu'Hippocrate de Chio découvrît le théorème des lunules du triangle rectangle pour dissiper ce préjugé.

C'est sans doute par un phénomène analogue que les errements actuels sur les angles ont pris naissance. Loin de se limiter aux moyens d'étude actuels, ne serait-il pas naturel d'admettre que s'il faut la règle pour la droite, le compas pour le cercle, il faut aussi un instrument spécial pour les angles. Cet appareil devra être simple et précis, mais il est possible de l'obtenir en s'appuyant sur la théorie des hyperboles étoilées.

Y a-t-il intérêt à opérer sur les angles avec cette nouvelle méthode et à pouvoir se passer souvent de la Trigonométrie? Nous répondrons affirmativement à cette question; car ce dernier problème, à l'inverse des deux autres, ne nécessite pas seulement la connaissance d'un nombre ou l'exécution d'une opération arithmétique, il exige l'emploi d'une Table de logarithmes, qui fournit, pour chaque angle, des données particulières, et qui constitue pour chacun d'eux une personnalité, une sorte d'état civil. En outre, l'emploi des tables nécessite un degré d'instruction plus élevé que celui qu'on doit avoir pour connaître le nombre π ou pour savoir extraire une racine cubique.

Mais un intérêt plus grand encore s'attache à cette question; car si, depuis le siècle dernier, la Géométrie a repris le cours de ses progrès, que la création de l'Analytique et la découverte du calcul infinitésimal avaient un moment paralysé, il est certain qu'une connaissance plus approfondie de l'angle, l'une des figures qu'elle emploie de préférence, ne pourra que faciliter grandement de nouvelles recherches et de nouvelles applications.

Cette affirmation, émise dès l'origine de la théorie des hyperboles étoilées, se trouve déjà confirmée par la singulière découverte de l'hyperbole développante, cette courbe transcendante qui forme la limite d'une famille de courbes transcendantes et algébriques de tous les degrés et qui résume et simplifie toutes leurs propriétés.

N'est-il pas curieux de constater que cette courbe permet de résoudre incidemment, comme un simple corollaire, deux des questions précitées, regardées comme insolubles, la quadrature du cercle et la division de l'angle dans le cas le plus général? Certes, la

solution obtenue ne répond pas à la conception primitive, mais elle est effective, puisqu'elle est établie rationnellement et qu'elle fournit les quantités cherchées avec l'approximation demandée.

S'il est admis que le quotient de deux nombres premiers entre eux, pris avec un certain nombre de décimales, représente le rapport de ces nombres, que l'extraction d'une racine faite dans les mêmes conditions représente la valeur du radical, peut-on refuser d'admettre une tolérance semblable dans une construction graphique ?

D'ailleurs, malgré les services que peut rendre cette application de la théorie des hyperboles étoilées, celle-ci n'en subsiste pas moins, et c'est aux principes exposés dans le Chapitre I, et non à cette déduction curieuse, que cet Ouvrage est consacré.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ DE LA QUESTION.

I. — *Mesure des angles. Critique des méthodes actuelles. Recherche d'une méthode rationnelle.*

C'est, en général, au moment d'aborder la question de la mesure des angles que les cours de Géométrie définissent la mesure d'une grandeur. Citons un énoncé classique :

Pour mesurer une grandeur, on cherche une commune mesure entre cette grandeur et une autre de même espèce, arbitraire, mais bien connue, qui reçoit le nom d'unité.

Il est admis en principe que l'unité de mesure d'une grandeur géométrique doit être facile à construire, n'être ni trop grande, ni trop petite; enfin, elle doit pouvoir se ramener à la mesure directe *de certaines lignes droites convenablement choisies.*

Aucune de ces conditions n'est réalisée dans l'unité d'angle, et tous les commentaires qui précèdent sa définition ne servent qu'à masquer la violation de toutes ces règles.

De là naissent des difficultés dans les explications préliminaires, des complications pour le choix des

expressions, tant qu'enfin, il faut se résoudre à adopter la formule suivante, reconnue fausse : *L'angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.*

D'ailleurs, à vrai dire, cette unité n'existe même pas ; c'est tantôt le radian, tantôt le degré, tantôt le grade, avec des subdivisions différentes dans chaque cas. Dans aucun de ces systèmes, *l'unité ne peut être construite avec la règle et le compas*, bien que cette condition soit considérée comme le critérium de la précision.

Ces contradictions sont la conséquence d'une erreur initiale. Quand il s'agit de comparer des angles, on les superpose par le sommet, ce qui supprime toute possibilité de combinaison des figures et de recherches de lieux géométriques. Cette méthode de la superposition ne convient guère qu'à des démonstrations de propriétés élémentaires, mais non à des recherches de problèmes.

Examinons un cas très simple pour mieux faire comprendre cette idée et pour montrer comment il serait possible de procéder pour la comparaison rationnelle des angles.

Soit SDN un triangle dont les angles de base sont dans le rapport $\frac{1}{2}$

(1) $$S = \frac{1}{2} N.$$

L'angle extérieur $\mathfrak{D}$ sera le triple de S :

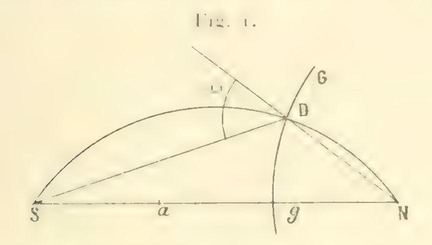
(2) $$\mathfrak{D} = S + N = 3S.$$

La base NS étant fixe, faisons varier les angles S et N depuis o jusqu'à ce que SD et DN deviennent parallèles, et conservons toujours la proportion (1). La proportion (2) subsistera également. L'angle $\mathfrak{D}$ variera ainsi de 0° à 180°, en restant toujours égal à 3S.

Dans ce mouvement, le sommet D décrira une ligne qui sera le lieu des sommets des angles dont les côtés passent par S et N et qui sont égaux à 3S.

On verrait sans difficulté que le lieu du point D est

Fig. 1.



une branche d'hyperbole Gg (*fig.* 1) qui a les caractéristiques suivantes :

L'axe réel est Sg; les asymptotes, inclinées à 60° sur SN, passent au point a, tel que

$$Sa = ag = Ng.$$

Donc, le tiers d'un angle ω peut être obtenu par l'intersection de deux lieux géométriques : l'hyperbole Gg et l'arc de cercle capable de $(180° - \omega)$ décrit sur SN.

Cette méthode est applicable au cas où, dans SDN, le rapport des angles à la base serait quelconque et égal à $\frac{s}{n}$. Mais il faut définir d'abord ce que devient dans ce cas la courbe Gg, que nous désignerons sous le nom général d'*hyperbole étoilée*.

II. — *Définitions et notations.*

Dans tout le cours de cette étude, nous adopterons, sauf indication contraire, les conventions et notations suivantes :

s, n, m sont des nombres entiers tels que

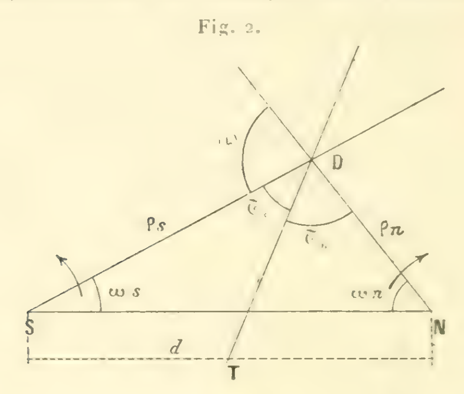
$$s + n = m \quad (s < n).$$

Considérons deux pôles fixes N et S, distants d'une longueur d, et un point mobile D.

Soient :

ω l'angle extérieur du triangle SDN (notation em-

Fig. 2.



ployée pour le distinguer du point D) ; ρ et ω les coordonnées polaires de D. Quand le pôle est bien spécifié, ces coordonnées sont affectées d'un indice de même nom que le pôle.

Quand ω_n et ω_s varient, ils partent, l'un de la position initiale NS en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, l'autre, de SN, en tournant en sens contraire.

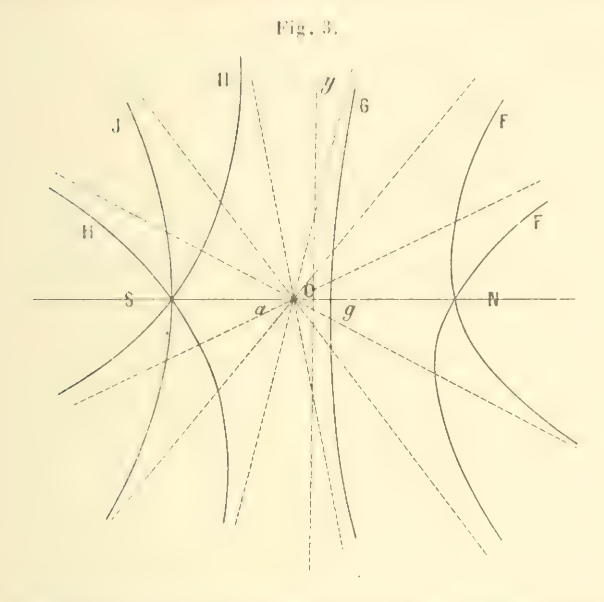
Si nous choisissons le point D *de manière que le rapport* $\frac{s}{n}$ *soit constant, ce point décrira une hyperbole étoilée.*

Soit DT la tangente à la courbe ;

ε_s, ε_n représentent les angles de cette tangente avec les rayons vecteurs ND, SD.

La figure 3 représente une de ces courbes. Nous nous sommes contentés, pour établir cette épure et les com-

Fig. 3.



mentaires qui suivent, d'enregistrer les résultats donnés par le Chapitre IV. Nous renvoyons à ce Chapitre l'étude analytique complète des hyperboles étoilées, qui ne présente qu'un intérêt théorique. En pratique, nous n'utiliserons que la branche Gg, dite *branche des angles géométriques*.

Les calculs ont été établis pour le cas où, m étant premier, m, n, s sont entiers et premiers entre eux. Quelques remarques suffiront à généraliser les résultats ainsi obtenus.

Les nombres m, n, s étant premiers entre eux et m étant impair, l'égalité $s + n = m$ est possible de $\frac{m-1}{2}$ manières, qui donnent naissance à $\frac{m-1}{2}$ hyperboles étoilées.

C'est ainsi que, la figure 3 représentant l'hyperbole où

$$m = 7, \quad n = 4, \quad s = 3,$$

on pourrait en construire deux autres ayant comme caractéristiques

$$m = 7, \quad n = 5, \quad s = 2,$$
$$m = 7, \quad n = 6, \quad s = 1.$$

Toutes ces courbes dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est algébrique et de degré $(m - 1)$, comprennent :

1° Une branche hyperbolique G correspondante aux valeurs de D comprises entre 0° et 180°.

Si Oy est la perpendiculaire au milieu de SN, elle est toujours située par rapport à Oy du même côté que N. La ligne NS est un axe de symétrie ; le point g, où elle coupe la courbe, est un sommet.

2° Une deuxième branche hyperbolique J passant par S ou N, suivant que s ou n sont impairs. La ligne NS est aussi un axe de symétrie pour cette branche.

3° Une série de branches hyperboliques, FF, HH, deux à deux symétriques par rapport à NS et passant en N et S.

Le nombre total de ces dernières est constant pour les hyperboles du même ordre, mais le nombre d'entre elles qui passent en N ou S est variable et peut être nul en N pour $s = 2$, $s = 1$ et $s = 0$ (*voir* pour ce dernier cas la remarque II ci-après).

Remarque I. — Pour $m = 2$, $s = 1$, $n = 1$, la courbe se réduit à la branche G, qui elle-même se réduit à Oy.

Remarque II. — Lorsque s tend vers 0, la courbe tend à se confondre avec la partie de NS située à droite de N; mais, par un artifice de construction, nous parviendrons à l'amplifier et à reconnaître qu'elle conserve les caractères des hyperboles étoilées. Le Chapitre III sera consacré à l'étude de la courbe ainsi obtenue, appelée *hyperbole développante*.

Remarque III. — Si m admet un facteur commun p avec n et s, le degré de la courbe se réduit à $\left(\frac{m}{p} - 1\right)$.

Ainsi, l'hyperbole étoilée pour laquelle

$$m = 15, \qquad n = 12, \qquad s = 3,$$

se confond avec celle pour laquelle

$$m = 5, \qquad n = 4, \qquad s = 1.$$

Il y a donc toujours $\frac{15-1}{2} = 7$ courbes pour lesquelles $m = 15$, mais quelques-unes d'entre elles ne sont pas du 14e degré (algébriquement), et se confondent avec des courbes pour lesquelles $m = 5$ ou $m = 3$.

C'est ainsi qu'on aurait encore pour

$$m = 15, \qquad n = 10, \qquad s = 5,$$

la même courbe que pour

$$m = 3, \qquad n = 2, \qquad s = 1;$$

mais les autres courbes, où $m = 15$ est premier avec s et n, se comportent comme si 15 était premier.

Remarque IV. — Si m est pair tout en étant premier avec s et n, la branche J disparaît, mais une des asymptotes devient parallèle à Oy.

Dans les courbes d'ordre m, il y en a une qui n'est autre que Oy ; c'est celle pour laquelle $s = n = \frac{m}{2}$.

Remarque V. — Si m, n, s sont incommensurables, le nombre des branches FF, HH devient infini, mais la branche G subsiste toujours, séparée nettement des autres.

Remarque VI. — Dans tous les cas, toutes les asymptotes passent par le point a symétrique du point g par rapport à Oy.

Définitions complémentaires. — Le sommet g de la branche G se nomme *centre radial*. Il sera toujours désigné par cette lettre.

Toute ligne issue de ce point s'appelle *radiale*.

Une radiale coupe la branche G en un second point. La perpendiculaire menée de ce point à la *radiale* se nomme *coradiale*.

Le point a, où concourent les asymptotes, s'appelle *centre asymptotique*.

Par analogie avec ce qui a lieu pour les coniques, nous appellerons *longueur des différentes lignes issues d'un point* D *de l'hyperbole étoilée :* normale, radiale, etc., la longueur de ces droites comprises entre le point D et l'axe de la courbe.

Nous emploierons les notations suivantes :

Dp longueur de la coradiale ;
De » bissectrice de l'angle ⊙ ;
Dn » normale ;
Dg » radiale ;
Dt » tangente.

Les lettres p, e, n, g, t seront toujours employées

pour désigner le point d'intersection de ces lignes avec l'axe.

Dans tout ce qui va suivre, sauf dans le Chapitre IV, nous convenons de ne considérer que la branche G, et c'est à cette branche seule que nous donnons le nom d'*hyperbole étoilée*.

L'expression *l'hyperbole* $s:n$ sera employée pour désigner une hyperbole étoilée dont le rapport des angles de base est $\frac{s}{n}$.

III. — *Détermination d'une fraction d'angle quelconque.*

Soit un angle ω à diviser dans un rapport $\frac{s}{n}$ (voir *fig.* 1 et 2).

Tout revient, comme dans le cas de la figure 1, à construire sur SN un triangle dont l'angle extérieur soit égal à ω et dont les angles de base soient dans le rapport $\frac{s}{n}$.

Le point D se trouvera donc à l'intersection de l'hyperbole $s:n$ et du segment capable de $(180° - \omega)$ décrit sur SN.

On obtient ainsi les relations suivantes entre les angles de ce triangle :

$$\frac{\omega_s}{\omega_n} = \frac{s}{n},$$

$$\omega = \omega_s - \omega_n = \omega_n\left(1 + \frac{s}{n}\right) = \omega_s\left(1 - \frac{n}{s}\right),$$

$$\omega_n = \frac{n}{m}\omega = \frac{n}{s}\omega_s,$$

$$\omega_s = \frac{s}{m}\omega = \frac{s}{n}\omega_n.$$

Le problème de la division graphique d'un angle, dans

le cas le plus général, se ramène donc à la recherche du point d'intersection de deux courbes.

La détermination d'un point par l'intersection de deux courbes est considéré comme susceptible de peu de précision, à moins que les deux courbes ne soient des droites ou des cercles.

Cette règle, peut-être un peu absolue, semble ici en défaut pour deux raisons :

1° Les courbes considérées se coupent sous un angle voisin de 90°, circonstance très favorable à la netteté de l'intersection ;

2° Pour un même rapport $\frac{s}{n}$, l'hyperbole reste la même, les arcs de cercle seuls varient.

Il sera donc possible de la construire une fois pour toutes avec une grande précision par un des procédés indiqués au Chapitre II.

L'erreur à craindre sur la construction de cette courbe tracée par un graveur habile ne semble devoir dépasser celle que peut commettre un dessinateur ordinaire avec la règle et le compas.

L'inconvénient de ce procédé est d'exiger autant d'hyperboles qu'il y aura de rapports $s:n$ à rechercher. Cet inconvénient disparaît par l'emploi de la méthode indiquée au Chapitre III.

Toute objection disparaîtrait si on disposait d'un appareil permettant de tracer les hyperboles étoilées avec précision. Il y a donc intérêt à rechercher un appareil de ce genre qui paraît parfaitement réalisable.

CHAPITRE II.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE L'HYPERBOLE ÉTOILÉE.

I. — *Construction par points.*

Problème I. — *Déterminer le point g où l'hyperbole $s:n$ coupe la ligne des pôles* (*fig.* 4).

Plaçons en N et S deux roues à friction, dont les

Fig. 4.

rayons soient dans le rapport $\frac{n}{s}$ inverse de celui de l'hyperbole. Fixons deux règles à coulisse SD, ND sur les axes de ces roues.

Un style assujetti à coulisser à la fois le long de ces deux règles décrira l'hyperbole étoilée, si les règles partent simultanément de la position NS. Il est évident que, dans ces conditions, le point g sera au point de contact des deux circonférences. Pour ce point, que nous avons appelé *centre radial*, nous aurons donc la

proportion

$$\frac{Sg}{Ng} = \frac{n}{s}.$$

Cette relation peut s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$Sg = \frac{n}{m} d, \qquad Ng = \frac{s}{m} d.$$

Remarque. — Ce principe pourrait être utilisé pour la construction d'un appareil permettant de tracer les hyperboles étoilées d'un mouvement continu.

Pour éviter d'avoir un trop grand nombre de roues, on pourrait employer deux cônes commandés par une courroie, comme dans certaines transmissions de machines à vitesses variables.

Problème II. — *Construire un point d'une hyperbole s : n (fig. 4).*

Prenons un angle α arbitraire, mais assez petit pour que

$$s\alpha - n\alpha < 180°.$$

Au point N, faisons un angle $n\alpha$; au point S, un angle $s\alpha$. Le point D où ces droites se couperont appartiendra à la courbe.

Cette construction sera renouvelée autant de fois qu'il sera nécessaire pour que la forme de l'hyperbole soit suffisamment accusée.

Toutefois, il paraît plus simple, après avoir obtenu un premier point, de continuer les recherches conformément aux indications du problème III.

Corollaire. — Les angles $n\alpha$ et $s\alpha$ peuvent être portés au-dessus ou au-dessous de SN ; en opérant ainsi, on obtient deux points symétriques.

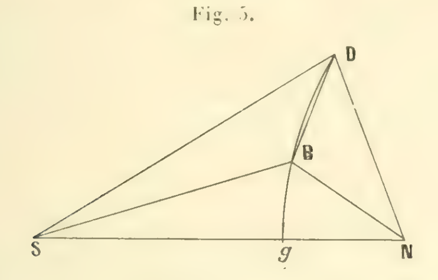
Donc, la ligne des pôles est un axe de symétrie de la courbe.

La construction indiquée par le problème I permet d'arriver à la même conclusion.

Problème III. — *Étant donné une hyperbole étoilée par ses pôles et un point, construire la courbe* (*fig.* 5).

Soit D un point de la courbe ; joignons-le aux pôles. Menons les bissectrices des angles ω_n et ω_s ainsi obte-

Fig. 5.



nus. Ces bissectrices se coupent en un point B qui appartient à l'hyperbole étoilée.

En effet, les coordonnées angulaires du point B sont $\frac{\omega_n}{2}$ et $\frac{\omega_s}{2}$ dont le rapport est égal à celui qu'on a en D, $\frac{\omega_s}{\omega_n}$.

Il en serait de même pour les bissectrices des angles $\frac{\omega_s}{2}$ et $\frac{\omega_n}{2}$, ainsi que pour celles des angles BSD et BND, et ainsi de suite.

On pourrait aussi porter au-dessus de SD et de ND des angles égaux à ω_s et ω_n ou à des fractions de ces angles.

Cette propriété subsisterait encore, si, au lieu de la

moitié des angles, on prenait le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$ ou une fraction quelconque, pourvu que, dans chaque cas, on prenne la même proportion à chaque pôle.

Corollaire I. — Par un point du plan on peut faire passer une hyperbole étoilée et une seule.

Par suite, une hyperbole étoilée peut être désignée par le nom d'un de ses points, quand les poles sont déterminés.

Corollaire II. — Au lieu de mener la bissectrice SB, on aurait pu mener la bissectrice DB.

Cette propriété peut être utilisée lorsque le pôle S est en dehors des limites de l'épure, et en particulier dans le cas où il s'éloignerait à l'infini ; DS serait alors parallèle à SN et l'on aurait

$$\omega_n = \omega, \qquad n = m.$$

C'est en démontrant que l'hyperbole développante peut être obtenue par ce procédé que nous la rattacherons à la famille des hyperboles étoilées, où elle a pour caractéristique $s = 0$.

Problème IV. — *L'hyperbole étoilée étant donnée par un point, trouver le rapport $s : n$.*

Il suffit de construire la courbe par points et de déterminer son centre radial g (*fig.* 5) ; $s : n$ est donné par la relation

$$\frac{s}{n} = \frac{Ng}{Sg}.$$

Problème V. — *Évaluer un angle donné graphiquement* (*fig.* 5).

Construisons un triangle SDN dans lequel SDN sera

égal à un angle connu, 60° par exemple, et NSD sera égal à l'angle donné. Cherchons, comme dans le problème IV, le centre radial de l'hyperbole D dans le système de pôles N, S.

Nous aurons la valeur de NSD par la relation

$$\text{NSD} = \frac{\text{N}g}{\text{SN}}(180° - 60°) = \frac{\text{N}g}{\text{S}g}\,120°.$$

Si l'angle de 60° avait été placé en N, nous aurions eu

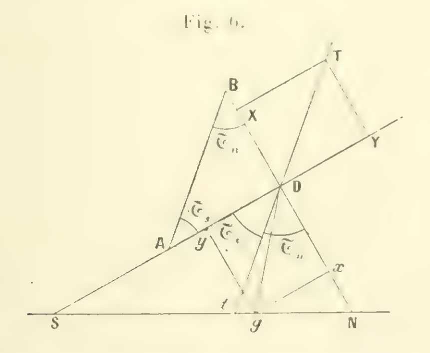
$$\text{NSD} = \frac{\text{N}g}{\text{S}g}\,60°.$$

Les moyens pour résoudre le problème sont donc très variés, car, au lieu de 60°, nous pourrions prendre tout autre angle connu. On dispose donc d'un procédé de vérification qui permettra aussi d'établir une valeur moyenne.

II. — *Construction des tangentes.*

Soient S, N, D les points qui définissent une hyperbole étoilée ; soit DT la tangente au point D.

Fig. 6.



Supposons que la courbe soit parcourue par un mobile dont la vitesse en D sera DT.

Si nous nous plaçons en S, cette vitesse sera la résultante d'une vitesse de translation DY dirigée suivant le rayon vecteur, et d'une vitesse de circulation perpenculaire à DY,

$$TY = \rho_s \frac{d\omega_s}{dt}.$$

Au pôle N, les résultantes seraient DX et TX. Or, le rapport $\frac{TY}{TX}$ est connu

$$\frac{TY}{TX} = \frac{\rho_s \frac{d\omega_s}{dt}}{\rho_n \frac{d\omega_n}{dt}} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \times \frac{s}{n},$$

puisque, par définition de la courbe, le rapport des vitesses angulaires en S et N est $\frac{s}{n}$.

Tout revient donc à mener par le point D une droite DT, dont les distances aux côtés SD et ND soient dans un rapport connu.

Construction. — Remarquons sur la figure 6 qu'on peut écrire

$$\frac{TY}{TX} = \frac{\sin \widetilde{\varepsilon}_s}{\sin \widetilde{\varepsilon}_n} = \frac{s}{n} \frac{\rho_s}{\rho_n}.$$

Prenons sur SD dans le sens DS une longueur $AD = Ks\rho_s$ et sur ND, dans le sens opposé à ND et au delà du point D une longueur $DB = Kn\rho_n$, K étant une constante arbitraire. Nous formons ainsi le triangle ABD dans lequel

$$\frac{AD}{BD} = \frac{Ks\rho_s}{Kn\rho_n} = \frac{s\rho_s}{n\rho_n} = \frac{\sin \widetilde{\varepsilon}_s}{\sin \widetilde{\varepsilon}_n} = \frac{\sin DAB}{\sin BDA}.$$

La ligne AB est donc parallèle à la tangente.

Théorème. — *La tangente et la radiale sont éga-*

lement inclinées sur la bissectrice de l'angle ν *et de son supplément* SDN (*fig.* 6).

Soit Dg la radiale; le rapport des sinus des angles formés par cette droite avec les rayons vecteurs est égal au rapport des distances du centre radial aux mêmes rayons, $\frac{gy}{gx}$.

$$gy = gS \sin\omega_s,$$
$$gx = gN \sin\omega_n,$$
$$\frac{gy}{gx} = \frac{gS}{gN} \times \frac{\sin\omega_s}{\sin\omega_n}.$$

Au point g, on a la relation

$$\frac{gS}{gN} = \frac{n}{s}.$$

Dans le triangle SDN,

$$\frac{\rho_s}{\rho_n} = \frac{\sin\omega_n}{\sin\omega_s};$$

donc

$$\frac{gy}{gx} = \frac{n}{s}\,\frac{\rho_n}{\rho_s}.$$

Ce rapport est l'inverse de $\frac{\sin\mathfrak{T}_s}{\sin\mathfrak{T}_n}$. On a donc

$$g\,\mathrm{DN} = \mathfrak{T}_s, \qquad g\,\mathrm{DS} = \mathfrak{T}_n.$$

La construction de la tangente est donc très simple quand on connaît le centre radial; il suffit de prendre la symétrique de la radiale par rapport à la bissectrice des rayons vecteurs.

Théorème. — *Dans un triangle, si l'on considère successivement chaque sommet comme un point d'une hyperbole étoilée, dont les pôles sont constitués par les deux autres sommets, les radiales issues de chacun des sommets sont concourantes; il en est de même des tangentes.*

Démontrons-le pour ces dernières : la démonstration serait la même pour les radiales.

Soient A, B, C les trois angles du triangle, et m, n, s trois nombres tels que

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{s}.$$

Soient δ_n, δ_s les distances de la tangente en A aux rayons vecteurs AB, AC ; nous avons

$$\frac{\delta_s}{\delta_n} = \frac{s}{n}\frac{AB}{AC} = \frac{s}{n}\frac{\sin C}{\sin B}, \qquad \frac{\delta_s}{s \sin C} = \frac{\delta_n}{n \sin B}.$$

Pour la tangente en B, on aurait

$$\frac{\delta_m}{m \sin A} = \frac{\delta_n}{n \sin B}.$$

Au point de rencontre de ces droites, on aura

$$\frac{\delta_s}{s \sin C} = \frac{\delta_n}{n \sin B} = \frac{\delta_m}{m \sin A}.$$

Donc, ce point sera aussi sur la tangente menée du point C pour lequel on doit avoir

$$\frac{\delta_m}{m \sin A} = \frac{\delta_s}{s \sin C}.$$

III. — *Asymptotes.*

Directions asymptotiques. — Les directions asymptotiques sont parallèles aux rayons vecteurs pour lesquels $\theta = 180°$.

$$\omega_s + \omega_t = 180°,$$

$$\omega_s \frac{s}{m} = 180°,$$

$$\omega_s = \frac{m \times 180°}{s}.$$

Centre asymptotique. — *Le centre asymptotique est symétrique du point g par rapport à la perpendiculaire au milieu de la distance des pôles.*

Première démonstration. — On a (*fig.* 6)

$$\frac{TY}{TX} = \frac{s}{n}\,\frac{\rho_s}{\rho_n},$$

en chaque point d'une tangente. Or, quand le point D s'éloigne à l'infini suivant une direction asymptotique, les rayons vecteurs deviennent parallèles à cette direction et passent toujours par S et N ; donc $\frac{\rho_s}{\rho_n}$ tend vers 1.

Par suite,

$$\operatorname{Lim}\frac{TY}{TX} = \frac{s}{n}.$$

L'asymptote est donc une parallèle à la direction asymptotique qui divise l'espace situé entre les rayons vecteurs dans le rapport $\frac{s}{n}$; donc elle divise SN dans ce même rapport

$$\frac{Sa}{Na} = \frac{s}{n}.$$

Le point a est donc symétrique de g pour lequel

$$\frac{Sg}{Ng} = \frac{n}{s}.$$

Deuxième démonstration. — Quand le point D s'éloigne suivant une direction asymptotique, la bissectrice de l'angle SDN devient parallèle aux rayons vecteurs et passe par le milieu de leur intervalle.

Or, la radiale et la tangente et, dans le cas actuel, l'asymptote, étant symétriques par rapport à cette droite, et la radiale passant par un point fixe g,

l'asymptote devra passer par le point symétrique situé de l'autre côté de cette bissectrice. On conclut comme précédemment.

Corollaire. — Quand on connaît le point pour lequel $\omega = 90°$, on obtient les directions asymptotiques en doublant les angles de base.

En effet, si $\omega_s + \omega_n = \omega = 90°$,

$$2\omega_s + 2\omega_n = 180°.$$

Remarque. — Les propriétés des tangentes et des asymptotes ont été établies pour la branche G, mais il est évident qu'elles s'appliquent à toute la courbe.

IV. — *Digression.*

Les recherches effectuées pour compléter l'étude géométrique des hyperboles étoilées par une construction simple du centre de courbure en un point ont conduit à établir une série de propositions enregistrées ci-après. Bien que quelques-unes d'entre elles soient déjà connues et qu'elles ne soient pas toutes utilisées pour le but cherché, il a paru intéressant de les laisser ainsi groupées pour montrer comment les recherches sur les questions d'angles sont susceptibles, non seulement de provoquer la découverte des propriétés nouvelles, mais encore de conduire à des solutions élégantes dans les théories déjà connues.

Le groupement de ces propositions a, en outre, l'avantage de rendre leur démonstration si simple, qu'il suffira parfois de les énoncer.

Prenons, comme point de départ, une définition connue :

Deux droites, tracées entre les côtés d'un angle ou de son opposé par le sommet sont antiparallèles, lorsque la première fait avec l'un des côtés de l'angle donné un angle égal à celui que la seconde fait avec l'autre côté.

Cette définition, employée en Géométrie pour l'étude des lignes proportionnelles, sera utilisée ici pour définir les directions par une locution abrégée. Elle équivaut à la suivante :

Dans un angle, deux directions antiparallèles sont également inclinées sur les bissectrices de cet angle, et réciproquement.

D'après ces énoncés, deux directions antiparallèles pour un angle le sont aussi pour son supplément. On peut ajouter :

Les perpendiculaires à deux directions antiparallèles sont antiparallèles.

L'antiparallélisme de deux droites peut aussi être défini par la direction d'une seule droite qui est parallèle à l'une des bissectrices des angles qu'elles forment.

La propriété de la tangente aux hyperboles étoilées peut alors s'énoncer très simplement des deux manières suivantes :

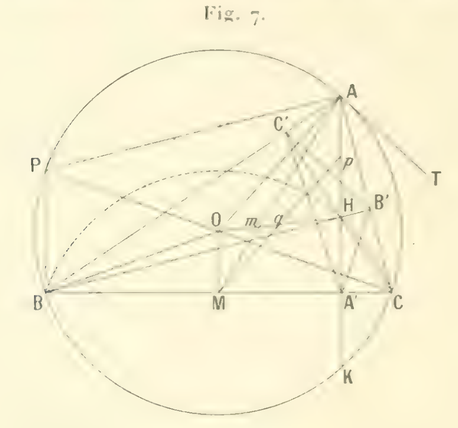
La radiale et la tangente sont antiparallèles pour l'angle ω.

La coradiale et la normale sont antiparallèles pour l'angle ω.

Pour les énoncés et les démonstrations qui vont suivre, il y a lieu de se reporter à la figure 7, dans

laquelle ABC est un triangle quelconque, inscrit au cercle O et dont les hauteurs sont AA′, BB′, CC′.

Fig. 7.



Notations :

R, rayon du Cercle circonscrit ;
A, B, C, angles du triangle ABC ;
a, *b*, *c*, côtés du triangle ABC ;
h_a, h_b, h_c, hauteurs du triangle ABC.

1. *La ligne qui joint les pieds de deux hauteurs d'un triangle est antiparallèle à la base d'où partent ces hauteurs et parallèle à la tangente au cercle circonscrit menée du sommet opposé à cette base.*

Joignons B′, C′ les pieds de deux hauteurs ; je dis que

$$AB'C' = B.$$

En effet, le quadrilatère CBC′B′ étant inscriptible, ces deux angles sont les suppléments d'un même angle C′B′C.

La tangente AT fait aussi avec AC un angle égal à B, puisque ces deux angles ont pour mesure commune la moitié de l'arc AC.

Remarque. — Le théorème ci-dessus n'est qu'un cas particulier de la proposition ci-après, dont la démonstration serait analogue :

Deux couples de droites antiparallèles se coupent en quatre points dont la jonction donne naissance à un couple antiparallèle aux deux autres.

2. *Le rayon du cercle circonscrit et la hauteur issus d'un même sommet sont antiparallèles par rapport à leur angle d'origine.*

En effet, ces droites sont respectivement perpendiculaires à deux droites antiparallèles, AT, BC.

Cette propriété pourrait être utilisée pour déterminer le centre du cercle circonscrit.

3. *Les rayons du cercle circonscrit issus des sommets d'un triangle sont perpendiculaires aux côtés du triangle qui joint les pieds des hauteurs.*

4. *Les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles du triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs.*

En effet, d'après l'énoncé 1,

$$AB'C' = B = CB'A'.$$

Donc, leurs compléments sont égaux.

5. *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

6. *Dans un triangle dont la base est fixe et dont l'angle au sommet est constant, la droite qui joint ce sommet au point de concours des hauteurs est constante et égale au double de la distance du centre du cercle circonscrit à la base fixe.*

Soient A et a constants. Menons le diamètre CP; joignons

AP qui sera perpendiculaire à AC et parallèle à BH,
BP qui sera perpendiculaire à BC et parallèle à AH.
Le parallélogramme AHPB montre que

$$AH = PB = \text{const.}$$

Le lieu du point H s'obtiendra par translation du cercle de A en H; c'est l'arc symétrique de BKC.

En second lieu, le triangle BCP montre que

$$OM = \frac{BP}{2} = \frac{AH}{2}.$$

7. *Dans un triangle, les médianes se coupent sur la ligne qui joint le centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs. Toutes ces lignes sont divisées en ce point dans le rapport de* 1 *à* 2.

Soit AM une médiane. Les triangles AHm et mOM donnent

$$\frac{A_m}{M_m} = \frac{H_m}{mO} = \frac{AH}{OM} = \frac{2}{1}.$$

8. *Dans un triangle, l'angle de la hauteur et du rayon du cercle circonscrit est égal à la différence des angles à la base.*

9. *Les tangentes aux neuf points du cercle d'Euler sont parallèles ou antiparallèles aux côtés du triangle qui joint les pieds des hauteurs.*

Le centre du cercle des neuf points s'obtient en menant Mp parallèle à OA, qui donne en q le centre du cercle et en p un point, les autres étant M et A' pour le sommet A.

Les tangentes en M et p, étant perpendiculaires à OA, sont parallèles à C'B'.

La tangente en A' est antiparallèle à cette direction par rapport à l'angle C'A'B'.

10. *Si, dans un triangle, un angle est égal à 60°, la bissectrice de cet angle est perpendiculaire à OH.*

En effet, l'arc BHC passe alors en O et le triangle AOH est toujours isoscèle. Or la bissectrice de l'angle A est aussi sa bissectrice en A.

Calcul du rayon en fonction de la hauteur. — Dans le triangle AA'B,

$$h_a = c \sin B.$$

Dans le triangle ABC,

$$2R = \frac{c}{\sin C}.$$

Éliminons c :

$$R = \frac{h_a}{2 \sin B \sin C}.$$

Cette formule sera utilisée pour la détermination du centre de courbure de l'hyperbole étoilée.

Remarques. — La formule précédente peut s'écrire

$$\frac{AA'}{2R} = \sin B \sin C.$$

Le triangle BHC donnerait

$$\frac{A'H}{2R} = \cos B \cos C.$$

Nous reconnaissons dans ces produits les éléments de $\cos(B + C)$ et $\cos(B - C)$. Il serait facile de vérifier géométriquement que leur somme $\frac{AK}{2R}$ est égale à

$\cos(B - C)$ et leur différence $\frac{AH}{2R}$ égale à $-\cos(B - C)$ ou $\cos A$.

De même les éléments de $\sin(A + C)$ et $\sin(A - B)$ se trouvent en BA' et CA'. En procédant à la vérification géométrique pour ce dernier, on trouve

$$\sin^2(C - B) = \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos B \cos C \cos(B - C);$$

$\sin(C - B)$ est le côté d'un triangle dont les côtés sont $\cos B$, $\cos C$ et dont l'angle opposé est $(C - B)$.

Une autre formule curieuse est celle qui donne OH. Dans le triangle AOH,

$$\begin{aligned}
\overline{OH}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{AH}^2 - 2\,AO \times AH \cos OAH \\
&= R^2[1 + 4\cos^2 A - 4\cos A \cos(C - B)] \\
&= R^2[1 - 4\cos A(\cos(C - B) - \cos A)] \\
&= R^2[1 - 4\cos A(\cos(C - B) + \cos(B + C))] \\
&= R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C).
\end{aligned}$$

Nous arrêtons là cette série de propriétés de la figure 7, en retenant pour la suite l'antiparallélisme de la hauteur et du rayon du cercle circonscrit et la formule qui les lie

$$R = \frac{h_1}{2\sin B \sin C}.$$

V. — *Construction du centre de courbure.*

Théorème. — *Le centre de courbure en un point de l'hyperbole étoilée est le centre du cercle circonscrit au triangle dont deux côtés sont formés par les rayons recteurs et dont la coradiale forme la hauteur.*

Les calculs du Chapitre IV montrent que l'expression du rayon du cercle osculateur au point D peut se

ramener à la forme (*fig.* 13)

$$\text{(1)} \qquad R = \frac{Dp}{2 \sin \tilde{c}_n \sin \tilde{c}_s}.$$

Cette expression montre déjà que R est le rayon d'un cercle circonscrit à un triangle dont Dp serait la hauteur et dont les angles de base seraient $\tilde{c}_n$ et $\tilde{c}_s$.

Il suffit donc de démontrer l'identité de ce triangle avec celui qui est formé par les rayons vecteurs du point D, et qui a ω comme angle au sommet et Dp comme hauteur.

Faisons les vérifications suivantes :

1° L'angle ω est bien l'angle au sommet d'un triangle ayant à la base $\tilde{c}_n$ et $\tilde{c}_s$.

En effet, d'après la définition de ces angles (*fig.* 2 et 6),

$$\tilde{c}_s + \tilde{c}_n = 180° - \omega.$$

2° D'après sa définition, la coradiale partage l'angle ω en deux parties respectivement égales à $(90° - \tilde{c}_n)$ et $(90° - \tilde{c}_s)$. Elle est donc dans la position nécessaire pour être la hauteur d'un triangle défini par la formule (1).

3° La normale, étant antiparallèle à la coradiale dans l'angle ω, est bien la ligne sur laquelle doit se trouver le centre du cercle circonscrit défini par cette même formule.

La démonstration du théorème résulte de ces trois vérifications.

Rayon du cercle osculateur au centre radial. — Toutes les formules qui donnent le rayon du cercle osculateur en un point de la courbe prennent une forme indéterminée quand on les applique au centre radial.

On arrive par le calcul à lever cette indétermination et à trouver la formule

$$R_g = \frac{3nsd}{2m(n-s)},$$

qui peut se traduire géométriquement par la suivante

$$R_g = \frac{3}{2}\,\frac{Sg \times Ng}{Sg - Ng}.$$

Les calculs pour parvenir à cette formule sont longs et laborieux. Par l'interprétation géométrique de la formule (1), on arrive au contraire à trouver la valeur ci-dessus par deux procédés différents. Tous deux sont simples et clairs et constituent réciproquement une vérification l'un de l'autre

Sous la forme

$$(1)\qquad R = \frac{Dp}{2\sin\widetilde{\tau}_s \sin\widetilde{\tau}_n},$$

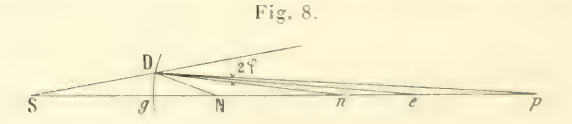
l'indétermination est moins apparente, car pour le centre radial $\sin\widetilde{\tau}_s = \sin\widetilde{\tau}_n = 1$ et la formule se réduit à

$$(2)\qquad R_g = \frac{Dp}{2},$$

mais l'indétermination subsiste, car Dp venant se confondre avec NS, son point d'intersection avec cette ligne est mal déterminé.

Soit D un point de la courbe infiniment voisin de g.

Fig. 8.



Menons les rayons vecteurs de ce point ainsi que la coradiale Dp, la bissectrice De et la normale Dn.

Nous admettrons que R_g est la limite de Dn.

Soit 2φ l'angle $n\mathrm{D}p$. La normale et la coradiale étant antiparallèles, l'angle 2φ a pour bissectrice $\mathrm{D}e$, dont la longueur limite est facile à calculer.

On pourrait croire que, 2φ devenant nul à la limite, $\mathrm{D}p$ et $\mathrm{D}n$ se confondront avec $\mathrm{D}e$, et que la valeur de cette dernière donnera la solution de la question; mais il n'en est rien, car la formule (2) nous montre que $\mathrm{D}p$ et $\mathrm{D}n$ ne peuvent être égaux.

Il faut donc chercher dans quel rapport se réduisent ces trois longueurs.

L'égalité (2) montre qu'à la limite le triangle $\mathrm{D}np$ est isoscèle.

Donc

$$\mathrm{D}pn = p\mathrm{D}n = 2\varphi. \tag{3}$$

Or, en tout point de la courbe

$$\mathrm{D}pn = \mathrm{D}en - \varphi. \tag{4}$$

(3) et (4) donnent

$$\mathrm{D}en - \varphi = 2\varphi, \qquad \varphi = \frac{\mathrm{D}en}{3}.$$

Donc les angles sous lesquels $\mathrm{D}p$, $\mathrm{D}e$, $\mathrm{D}n$ rencontrent NS sont respectivement

$$\frac{2\mathrm{D}en}{3}, \qquad \mathrm{D}en = \frac{3\mathrm{D}en}{3}, \qquad \mathrm{D}en + \varphi = \frac{4\mathrm{D}en}{3}.$$

Ces angles étant infiniment petits et sous-tendant un même arc $\mathrm{D}g$, on peut admettre que les longueurs des droites sont proportionnelles à ces angles. Par suite,

$$\mathrm{D}n = \frac{3}{4}\mathrm{D}e. \tag{5}$$

Calculons $\mathrm{D}e$ comme bissectrice extérieure du

triangle SDN par la formule classique

$$x' = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)},$$

$$De = \frac{2}{\rho_s - \rho_n}\sqrt{\rho_s\rho_n\left(\frac{d+\rho_s+\rho_n}{2} - \rho_s\right)\left(\frac{d-\rho_n-\rho_s}{2} - \rho_n\right)}.$$

A la limite

$$d = \rho_s + \rho_n, \qquad \rho_s = \frac{nd}{m}, \qquad \rho_n = \frac{sd}{m},$$

$$De = \frac{2}{\rho_s - \rho_n}\sqrt{\rho_s^2\rho_n^2} = \frac{2nsd}{m(n-s)},$$

$$Dn = \frac{3nsd}{2m(n-s)}.$$

Vérifions d'une autre manière la formule

(5) $$Dn = \frac{3}{4}De.$$

Dans le triangle Dnp, la bissectrice De partage toujours la base en parties proportionnelles aux côtés.

$$\frac{ne}{pe} = \frac{Dn}{Dp} = \frac{1}{2},$$

en vertu de l'équation limite (2)

(6) $$\frac{ne}{pe+ne} = \frac{1}{3} = \frac{ne}{pn} = \frac{ne}{Dn},$$

car, en vertu de la même équation (2), pnD est isoscèle : (6) peut donc s'écrire

$$ne = \frac{1}{3}Dn.$$

Or, à la limite

$$De = Dn + ne = \frac{4}{3}Dn.$$

et inversement

$$\frac{3}{4}De = Dn.$$

Nous retrouvons l'égalité (5), et le calcul s'achève comme dans le cas précédent.

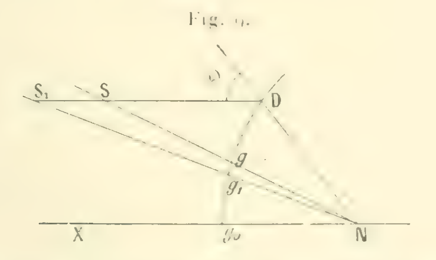
CHAPITRE III.

HYPERBOLE DÉVELOPPANTE.

I. — *Définition.*

Nous avons vu dans le Chapitre II (problème 5) que, pour déterminer un angle S, il y avait lieu de former

Fig. 9.



avec cet angle un triangle tel que DSN, dans lequel ω est un angle connu, et de rechercher le point g où l'hyperbole étoilée D, dans le système de pôles N, S, coupe la ligne de ces pôles. L'angle S est alors donné par la formule

$$S = \frac{Ng}{SN}\,\omega.$$

Il faut, pour cela, construire l'hyperbole étoilée D.

Supposons que, DN et l'angle ω étant constants, nous fassions cette recherche pour un angle différent DS_1N ; il sera nécessaire de construire une nouvelle hyperbole

étoilée. Il y aurait donc à construire une courbe pour chaque angle à mesurer.

Cette opération serait simplifiée si l'on connaissait le lieu des points g ainsi obtenus, car on n'aurait ainsi qu'une courbe à construire.

Nous allons déterminer la nature et les propriétés de cette dernière, que nous appellerons *hyperbole développante*.

La raison de cette dénomination apparaitra au cours de cette étude.

II. — *Équation de la courbe en coordonnées polaires.*

Soient N le point fixe et NDS $= 180° - \omega$ l'angle fixe (*fig.* 9).

Prenons comme axe polaire la ligne NX parallèle à DS, N étant le pôle,

$$DNX = \omega.$$

Nous compterons les angles en radians.

Menons la bissectrice NS de l'angle DNX. Cette ligne donne les égalités

$$DNS = SNX = DSN = \frac{\omega}{2}.$$

Donc le triangle DSN est isoscèle.

Dans le système des pôles S, N, l'hyperbole étoilée ω se réduit à la perpendiculaire Dg sur le milieu de SN, qui est en même temps bissectrice de l'angle SND.

Le point de rencontre, g, de cette bissectrice et de la bissectrice SN est donc un point du lieu géométrique.

Posons N$g = r$; les coordonnées de g sont r et $\frac{\omega}{2}$.

Cherchons celles d'un point g_1 situé sur une droite quelconque S_1N, faisant avec NN l'angle ω.

Dans le système de pôles S_1, N, le centre radial de l'hyperbole D sera donné par la proportion

$$\frac{DS_1N}{\varpi} = \frac{Ng_1}{S_1N},$$

DS_1N et Ng_1 étant les coordonnées de g_1, ceci s'écrit

$$(1) \qquad \rho = \frac{\omega}{\varpi} \times S_1N.$$

Dans le triangle SS_1N,

$$(2) \qquad \frac{S_1N}{\sin\frac{\varpi}{2}} = \frac{SN}{\sin\omega} = \frac{2r}{\sin\omega}.$$

L'équation de l'hyperbole développante est donc

$$(3) \qquad \rho = \frac{\omega}{\varpi}\,\frac{2r\sin\frac{\varpi}{2}}{\sin\omega} = \frac{2r\sin\frac{\varpi}{2}}{\varpi} \times \frac{\omega}{\sin\omega}.$$

Nous pourrons, pour avoir une équation semblable à l'équation générale employée quelquefois dans le Chapitre IV pour les hyperboles étoilées, mettre cette équation sous la forme

$$\rho = d\,\frac{u}{v},$$

d étant une constante; u et v étant fonctions de ω.

Il faut bien spécifier, pour l'emploi de cette équation, que même la constante d n'est pas la même que pour l'hyperbole étoilée.

La quantité d s'appellera *la base de l'hyperbole développante*.

III. — *Discussion de l'équation.*

1° Le point g (*fig.* 9) est sur la courbe, comme nous l'avions prévu, puisque ses coordonnées r et $\frac{\omega}{2}$, introduites dans l'équation (3), la transforment en identité.

2° Le point D s'y trouve également, ainsi qu'il aurait été facile de le prévoir. Vérifions que

$$DX = \frac{\omega}{\sin\omega}\,\frac{2r\sin\frac{\omega}{2}}{\omega} = \frac{2r\sin\frac{\omega}{2}}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}} = \frac{r}{\cos\frac{\omega}{2}}.$$

Le triangle rectangle DgX montre que cette relation est satisfaite.

3° XX est un axe de la courbe, car l'équation ne change pas si l'on change ω en $-\omega$.

4° Pour $\omega = 0$ le rapport $\frac{\omega}{\sin\omega} = 1$.

$$Xg_0 = d.$$

Interprétons géométriquement ce résultat après l'avoir mis sous la forme

$$\omega \times Xg_0 = 2r\sin\frac{\omega}{2}.$$

Dans le triangle SDX, $2r\sin\frac{\omega}{2}$ est la hauteur issue des sommets S ou X ; c'est aussi la distance des parallèles DS et XX, ou encore l'ordonnée du point D dans un système de coordonnées rectangulaires ayant X pour origine et XX pour axe des abscisses.

D'autre part, $\omega \times Xg_0$ est la longueur de l'arc du cercle de rayon Xg_0 et correspondant à l'angle au centre ω.

Ce résultat peut s'exprimer ainsi :

L'ordonnée du point D est la rectification de la portion de circonférence correspondante à l'angle au centre ω dans un cercle de rayon égal à d.

5° Cette propriété s'étend à tous les points de la courbe. En effet, passons en coordonnées rectangulaires

$$y = \rho \sin \omega,$$

combinée avec $\rho = d \frac{\omega}{\sin \omega}$, donne

$$y = d\omega.$$

Donc l'ordonnée de tout point de la courbe est le développement de l'arc de cercle de rayon d, sous-tendu par un angle au centre égal à sa coordonnée angulaire.

Donc, dans l'hyperbole développante, à des ordonnées égales correspondent des coordonnées angulaires égales.

Les ordonnées sont le développement de l'arc de cercle qu'elles sous-tendent dans la circonférence de rayon d, d'où le nom d'*hyperbole développante.*

6° Les équations des différentes hyperboles développantes ne diffèrent que par le facteur constant d ; donc toutes ces courbes sont semblables.

IV. — *Hyperbole développante considérée comme limite de l'hyperbole étoilée.*

L'hyperbole développante est la limite d'une hyperbole étoilée dont le pôle S s'éloigne à l'infini dans la direction de son axe.

Les caractéristiques deviennent $s = 0$; $m = n$; $\omega = \omega_n$.

Nous utiliserons pour cette démonstration la remarque contenue dans le Chapitre II (problème III, corollaire II) au sujet de la génération de la courbe par l'intersection des bissectrices de ω_n et de $(180^\circ - \omega)$.

Constatons que la condition est vérifiée au point initial D (*fig.* 9). En effet, le point g est obtenu par l'intersection des bissectrices de ω et de $(180^\circ - \omega)$. Par suite de la nature et de la position de ces angles, ces bissectrices sont perpendiculaires, et g est le milieu de NS. Il faut démontrer qu'il en est ainsi poar un point quelconque de la courbe.

On pourrait le voir *a priori*, car l'équation de l'hyperbole développante $\rho = d \dfrac{\omega}{\sin\omega}$ ne contient plus trace des coordonnées du point initial ; mais nous pouvons aussi le vérifier directement.

Première manière. — Considérons dans la figure 9 le point D comme un point quelconque.

Menons par ce point une parallèle DS à NX ; menons la bissectrice de l'angle DNX, qui coupera la courbe en g ; joignons Dg. Je dis que Dg sera la bissectrice de l'angle SND.

Le triangle DSN étant isoscèle par construction, il suffira de démontrer que g est le milieu de SN.

Or, les points D et g, étant sur une même hyperbole développante, ont des ordonnées proportionnelles à leurs coordonnées angulaires. Donc la cote de g est moitié de celle de D. Le point g est donc à égale distance des parallèles SD et NX ; il divise donc en deux parties égales toute droite telle que SN comprise entre ces parallèles.

Deuxième manière. — Inversement, si le point g est sur la courbe, la perpendiculaire menée de ce point sur gN devra se croiser sur la courbe avec la droite DN faisant avec NN un angle double de Ng.

Or,

$$gN = d\frac{\omega}{\sin\omega}.$$

Dans le triangle rectangle DgN

$$DN = \frac{gN}{\cos\omega} = \frac{d.\omega}{\cos\omega\sin\omega} = \frac{2d.\omega}{2\cos\omega\sin\omega} = \frac{2d.\omega}{\sin 2\omega}.$$

Donc DN est bien le rayon vecteur correspondant à l'angle 2ω.

V. — *Tangentes.*

Nous venons de démontrer que l'hyperbole développante n'est qu'un cas particulier de l'hyperbole étoilée. Il serait donc possible d'admettre pour elle toutes les propriétés des courbes de cette famille, mais il est préférable de vérifier chacune d'elles.

Nous emploierons les mêmes dénominations pour tous les éléments de la courbe, sauf pour la quantité d qui, dans le cas général, représente la distance des pôles, et qui, pour l'hyperbole développante, représente la base de la courbe.

L'angle ω est formé par le rayon vecteur d'un point et par une parallèle à l'axe. Il est égal à la coordonnée angulaire du point.

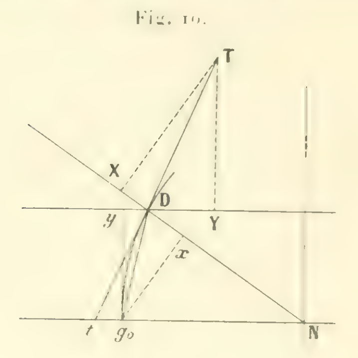
Théorème. — *La radiale et la tangente en un point de l'hyperbole développante sont antiparallèles par rapport à l'angle* ω *de ce point.*

Soient DT la tangente en un point, Ng_0 l'axe de la courbe, Dy la parallèle à cet axe (*fig.* 10).

Supposons que la courbe soit parcourue par un mobile dont la vitesse en D sera DT.

Pour le pôle N, cette vitesse sera la résultante d'une

Fig. 10.



vitesse de translation DX dirigée suivant le rayon vecteur et d'une vitesse de circulation

$$(1) \qquad \mathrm{TX} = \rho \frac{d\omega}{dt}.$$

Si nous écrivons l'équation de la courbe sous la forme $y = d.\omega$, l'accroissement TY sera

$$(2) \qquad \mathrm{TY} = d.\frac{d\omega}{dt}.$$

Prenons le rapport (1) (2),

$$\frac{\mathrm{TY}}{\mathrm{TX}} = \frac{d}{\rho} = \frac{\sin \delta_\rho}{\sin \delta_n}.$$

Cette équation détermine la direction de la tangente; celle de la radiale donne le rapport inverse :

$$\frac{g_0 y}{g_0 x} = \frac{d.\omega}{d.\sin\omega} = \frac{\rho}{d}.$$

Le théorème est donc vérifié.

Remarques. — 1° Étant donné que

$$\widetilde{e}_s + \widetilde{e}_n + \omega = 180°,$$

ces trois angles sont assemblés dans le triangle Dg_0N, dont $\widetilde{e}_s$ et ω forment les angles en D et N. On a donc les relations

$$\frac{\rho}{\sin\widetilde{e}_n} = \frac{d}{\sin\widetilde{e}_s} = \frac{\text{radiale}}{\sin\omega};$$

2° Le triangle Dtg_0 donne, de son côté,

$$\frac{Dg_0}{Dt} = \frac{\sin\widetilde{e}_s}{\sin\widetilde{e}_n} = \frac{1}{\rho} = \frac{\sin\omega}{d\times\omega};$$

3° Le triangle DNt, dans lequel Dt et Dg_0 sont antiparallèles, donne

$$\overline{DN}^2 = \rho^2 = Ng_0 \times Nt = d \times Nt.$$

Pour $d = 1$,

$$Nt = \rho^2.$$

VI. — *Asymptotes.*

Directions asymptotiques. — Les directions asymptotiques sont données par les équations

$$\sin\omega = 0,$$

d'où

$$\omega = \pm K\pi,$$

K étant un nombre entier quelconque $\gtrless 0$, car, pour $\omega = 0$,

$$\rho = d.$$

Les asymptotes sont donc toutes parallèles à l'axe.

Position des asymptotes. — La position des asymp-

totes est donnée par

$$y = d\varphi.$$

Par suite,

$$y = \pm dK\pi.$$

Les asymptotes sont donc situées deux à deux symétriquement par rapport à l'axe et équidistantes, leur distance étant égale à $d\pi$. Les deux premières sont à à cette distance de l'axe.

Au point de vue géométrique, ces dernières seules sont utiles.

Les branches de la courbe situées au delà ont une forme qui rappelle celle de la courbe $y = \tang x$, mais sans périodicité, ces branches s'allongeant de plus en plus à mesure qu'elles s'éloignent de l'axe.

VII. — *Rayons de courbure.*

Les calculs du Chapitre IV montrent que la formule qui donne le rayon du cercle osculateur en un point de l'hyperbole développante est la même que pour les hyperboles étoilées.

$$R = \frac{Dp}{2 \sin\delta_1 \sin\delta_n}.$$

La construction géométrique est la même.

La valeur de R en g_0 ressort de l'équation

$$R_g = \frac{3}{2}\,\frac{Ng.Sg}{Sg - Ng},$$

que nous écrirons

$$R_g = \frac{3}{2}\,\frac{Ng}{1 - \frac{Ng}{Sg}},$$

en faisant $Sg = \infty$, d'où

$$R_g = \frac{3}{2} Ng_0 = \frac{3}{2} d.$$

Ce résultat important peut se vérifier géométriquement comme pour l'hyperbole étoilée.

Le raisonnement (*fig.* 8) est entièrement applicable; mais il y a lieu de remarquer que, DS devenant parallèle à l'axe, le triangle DNe est toujours isoscèle et, par suite, à la limite

$$De = 2DN = 2d,$$

$$Dn = \frac{3}{4} De = \frac{3}{2} d.$$

VIII. — *Construction par points.*

Principe. — Faire correspondre à des ordonnées égales des angles égaux.

Tracé (*fig.* 11). — PN, NX, axes rectangulaires:

PN, longueur arbitraire divisée en 10 parties égales, d'où partent des parallèles à NX numérotées de 0 à 10 à partir de N;

N1, N2, ..., etc., divisions en 10 parties égales de l'angle droit numérotées de même.

L'hyperbole développante est obtenue par l'intersection des lignes des deux réseaux portant le même numéro.

Même opération en NQ.

Le tracé pourrait se poursuivre à gauche de PQ, mais, pratiquement, la portion Pg_0Q suffira.

IX. — *Utilisation des propriétés de l'hyperbole développante. Modes d'emploi.*

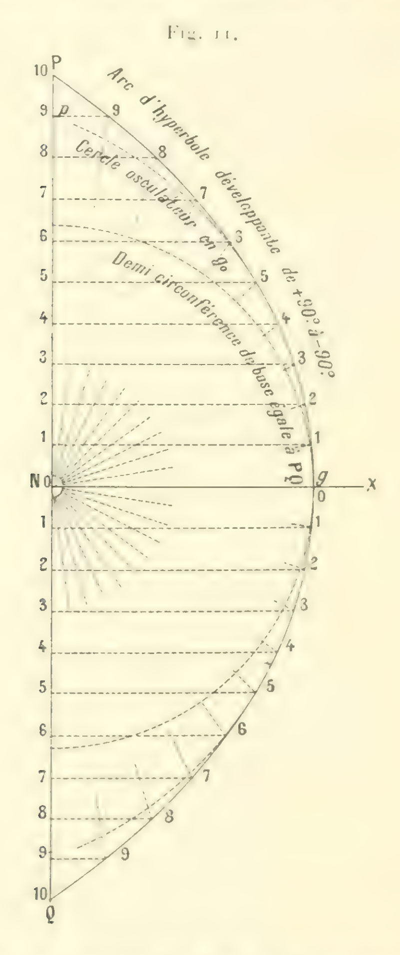
Il résulte de la construction précédente ainsi que de la définition de la courbe par les équations

$$y = \omega, \qquad x = \omega \cot \omega \qquad (\text{pour } d = 1),$$

que les ordonnées de celles-ci sont proportionnelles aux angles qu'elles sous-tendent, quelle que soit leur orientation primitive autour de N (*fig.* 11).

Donc, toute opération à effectuer sur les angles se

Fig. 11.



ramène, par projection de l'arc qu'ils sous-tendent, à des opérations de même nature exécutées sur des seg-

ments de droite. Le segment final donnera, par une construction inverse, l'angle cherché.

C'est la solution la plus générale du problème de mesure d'angles.

Par suite, l'unité d'angle pourra être définie par la longueur en mètres de PN ou de toute ordonnée correspondant à un angle déterminé. Cette unité se classera donc tout naturellement dans le système métrique, d'où grande simplification, non seulement dans les calculs, mais aussi dans la lecture des angles.

Du même coup, les opérations sur les arcs de cercle se ramènent aussi à des opérations sur des portions de droites. Dans ce cas, cependant, il faut prendre quelques précautions. Pour les angles, une seule hyperbole développante suffit à tout ; pour le cercle, il faut faire varier la base ou multiplier les résultats par le rapport entre le rayon de la circonférence donnée et la base de l'hyperbole employée. Si cette opération devait être répétée plusieurs fois, elle se simplifierait par l'emploi d'une échelle ou d'un compas de réduction.

Il résulte de l'exposé ci-dessus que les questions d'angles et de cercles restent toujours intimement liées ; le fait n'est pas surprenant, car ces figures ont la même loi d'accroissement ; c'est autour de cette loi que se groupent leurs propriétés de mesure ; mais ici, les rôles sont renversés ; ce n'est plus l'arc qui sert à mesurer l'angle, c'est l'angle qui sert à mesurer l'arc.

Modes d'emploi. — Il est nécessaire, pour mettre à profit ces propriétés de la courbe, de pouvoir la tracer d'une façon courante et précise. Le meilleur moyen serait évidemment de trouver un appareil permettant de la tracer d'un mouvement continu, en employant,

par exemple, un principe analogue à celui du problème I du Chapitre II.

A défaut de cet appareil, il sera possible de la tracer une fois pour toutes avec une grande précision et d'en faire des reproductions par un procédé quelconque.

Prenons deux exemples :

1° Si les courbes à employer ont toutes une même base, l'hyperbole sera reproduite sur une plaque de métal ou de caoutchouc, dont on se servira comme d'un cachet, avec quelques précautions pour que la courbe occupe bien la position voulue sur l'épure qui doit la recevoir.

On pourrait encore employer une équerre à hypothénuse courbe.

La précision obtenue par ces procédés sera comparable à celle que donne la règle pour le tracé de la ligne droite.

En effet, tout revient, dans chacun des cas, à se servir d'un gabarit pour tracer une courbe qui est toujours la même.

2° S'il était nécessaire que la base fût variable, il faudrait prendre un socle de métal portant aussi une empreinte d'hyperbole, mais cette plaque servirait de guide à un pantographe. Le fonctionnement de cet appareil pourrait être rendu très précis et très commode, parce qu'il serait utilisé à reproduire toujours la même figure, dont la forme est très simple.

3° Enfin, à défaut des moyens ci-dessus, il sera possible d'exécuter le tracé par points, mais ce dernier peut être grandement simplifié et remplacé par celui du cercle osculateur en g_0, si l'on ne sort pas des limites de $\pm 45°$ pour ω. Ce cercle a pour rayon $\frac{3}{2} N g_0$.

Nous allons examiner séparément cette dernière question, qui représente, comme nous le verrons, une véritable solution de la mesure de l'angle en employant exclusivement la règle et le compas.

X. — *Emploi de la règle et du compas pour le calcul de π et la mesure des angles.*

Principe de la méthode. — Le cercle osculateur au sommet de l'hyperbole développante est très voisin de la courbe, tant que l'angle polaire reste compris entre $\pm 45^\circ$, soit une ouverture totale de 90°.

La substitution d'un arc de cercle à un arc de la courbe dans cette région, pour effectuer des mesures angulaires ou circulaires, entraîne des erreurs qu'il est facile de calculer. Ce calcul montrera qu'à partir de la limite ci-dessus indiquée, la précision donnée par cette opération est déjà comparable à celle qu'on peut obtenir pour des mesures prises avec les meilleurs rapporteurs gradués en demi-degrés. Avec ceux-ci, en effet, l'angle à mesurer ou à construire peut être considéré comme exact à $15'$ près, tandis que par la méthode proposée l'erreur atteint $16'$, mais elle diminue très rapidement et devient inférieure à $1'$ pour un angle moitié moindre.

L'erreur maximum peut être calculée dans chaque cas par le procédé suivant, qui servira, en même temps, de démonstration à l'énoncé précédent.

Soit deux axes de coordonnées rectangulaires Nx, Ny et deux points sur Nx tels que

$$Ng_0 = -2^{\text{m}}, \qquad NC = 1^{\text{m}}.$$

Du point C comme centre, décrivons le cercle de rayon $Cg_0 = 3^{\text{m}}$ qui sera le cercle osculateur en g_0 de l'hyperbole $Ng_0 = 2^{\text{m}}$ (*fig.* 12).

Menons de l'origine une droite NP inclinée de n degrés sur Nx, ainsi que l'ordonnée PQ du point où elle coupe le cercle, dont l'équation est

$$(x-1)^2+y^2=9. \tag{1}$$

Si nous considérons P comme un point de l'hyperbole Ng_0,

$$PQ=y=\frac{2\pi n}{360}\times Ng_0=\frac{\pi n}{90}. \tag{2}$$

Enfin la droite PN donne l'équation

$$y=-x\,\text{tang}\,n. \tag{3}$$

Éliminons x et y entre ces trois équations; nous

Fig. 12.

obtiendrons une équation du second degré qui donnera π.

L'erreur trouvée sur ce nombre ainsi calculé fera connaître l'approximation sur laquelle nous pouvons compter en substituant le cercle à la courbe.

$$\pi^2\left(\frac{n}{90}\right)^2+\pi\left(\frac{n}{90}\right)\sin 2n-8\sin^2 n=0.$$

La figure 12 montre qu'il faudra prendre la racine la

plus faible en valeur absolue, l'autre racine ne répondant plus à la question.

$$(4) \qquad \pi = \frac{45}{n}\left(\sqrt{\sin^2 2n + 32\sin^2 n} - \sin 2n\right).$$

Pour $n = 45^\circ$,

$$\pi = \sqrt{17} - 1 = 3{,}1231.$$

L'erreur est inférieure à 0,02 sur π et à 0,01 sur x qui est égal à

$$\frac{\pi n}{90} = \frac{\pi}{2}.$$

Soit ε la différence en millimètres entre la valeur vraie de π et la valeur donnée par (4). L'erreur sur x est

$$\varepsilon \times \frac{n}{90}.$$

Cette quantité mesure l'arc d'erreur compté sur une circonférence de rayon $Ng_0 = 2^m$, dont la longueur totale, correspondant à 360°, est de $4000\,\pi$ millimètres.

L'erreur angulaire sera donnée par la proportion.

$$\frac{x^\circ}{360^\circ} = \frac{\varepsilon \times \dfrac{n}{90}}{4000\,\pi} = \frac{\varepsilon \times n}{360\,000\,\pi}, \qquad x^\circ = \frac{n \times \varepsilon}{1000\,\pi}.$$

La valeur en secondes $\alpha'' = 3600\,x = \dfrac{36}{10\pi}\,n\varepsilon$.

Négligeons les décimales de π, ce qui donne une limite supérieure de l'erreur

$$\alpha'' = 1{,}2 \times n \times \varepsilon.$$

Le Tableau suivant donne ces valeurs pour quelques angles faciles à construire avec la règle et le compas.

Angle PNg en degrés.	Valeur connue de π.	Valeur de π donnée par (4).	ε en millimètres.	α en minutes et secondes.
1	2	3	4	5
45°	3,14159265	3,1231	18	16,12
36	»	3,1341268	7	5,2
30	»	3,138	3	1,48
22°30'...	»	3,14052	1	0,27
18	»	3,1411375	0,4	8,64
15	»	3,1413774	0,21	3,7
9	»	3,14157	0,02	0,2
6	»	3,14158	0,01	0,7
3	»	3,1415925	0,00015	0,0005

Appelons e l'erreur commise sur une circonférence de rayon R ; l'erreur sur un arc de n degrés sera

$$e = \frac{R}{2} \times \frac{n}{90} \times \varepsilon,$$

n étant le nombre de degrés inscrit dans la colonne 1 et ε le nombre de millimètres inscrit dans la colonne 4.

A 45° pour 1^{dm} de rayon, $e = 0^{mm},45$.

Application du calcul précédent. — Quand on dispose d'une hyperbole développante tracée exactement, les opérations sur les angles et les arcs de cercle peuvent s'exécuter dans une zone quelconque de la courbe.

Au contraire, si l'on doit se contenter du procédé par approximation que nous venons de décrire, il est nécessaire de se fixer une limite de tolérance pour l'erreur et de déterminer, autour du point N, la zone où devront s'effectuer les opérations. Malgré cette restriction, il sera possible de résoudre toutes les questions qui pourront se présenter, à condition de prendre quelques mesures préliminaires.

Il sera nécessaire, en premier lieu, de fixer une

unité assez petite et facile à construire, l'angle droit étant trop grand pour constituer une véritable unité. D'autre part, le grade et le degré sont trop petits et ne peuvent se construire directement.

L'angle de 9° présentera, à ce point de vue, de grands avantages. Comme tous les angles de 3° en 3°, il peut se construire par une simple addition ou soustraction d'angles connus (9° = 45° — 36°) ; il n'est ni trop grand, ni trop petit ; enfin, les erreurs à craindre sur la construction de ses sous-multiples sont pratiquement inappréciables. Or, l'angle de 9° appartient précisément au système d'unités reconnu aujourd'hui le plus commode, c'est le décagrade.

Adoptons cette unité et cherchons la solution de quelques problèmes de mesure :

1° *Mesure d'un angle.* — Soit A un angle à mesurer. Divisons par l'unité (9°). Soient B le nombre trouvé, R le reste :

$$A = B + R.$$

L'angle B est déterminé ; l'angle R étant inférieur à l'unité peut être mesuré dans la zone de tolérance avec une erreur inférieure à 0″,2. Il en sera de même pour A.

2° *Construction d'un angle.* — Adoptons les mêmes notations que ci-dessus.

L'angle B étant un multiple de l'unité sera construit sans difficulté. L'angle R sera obtenu par une proportion entre son ordonnée et celle de l'unité avec une approximation de 0″,2 ; il en sera de même de l'angle A.

3° *Construire l'angle au centre d'un polygone régulier convexe de n côtés.* — Deux cas peuvent se présenter :

1° L'angle au centre cherché est inférieur à l'unité,

ce qu'on peut reconnaître par un petit calcul préliminaire. La règle sera la suivante : diviser PQ (*fig.* 11) en n parties égales, prendre l'angle correspondant à la division du milieu et le doubler;

2° L'angle au centre est plus grand que l'unité.

Prenons le cas de l'heptagone. L'angle au centre (unité 9°) est égal à

$$\frac{40}{7} = 5 + \frac{5}{7};$$

L'angle 5 qui vaut 45° est facile à construire; l'angle $\frac{5}{7}$ se construira, comme il a déjà été indiqué, par une simple proportion.

4° *Degré de précision des tracés.* — Cherchons à comparer la précision fournie par cette méthode à celle que donnent les constructions faites avec la règle et le compas.

Le plus grand rayon du cercle qu'on peut tracer avec un compas usuel est de 0m,30 environ.

Sur la circonférence de ce cercle, $\frac{1}{100}$ de millimètre représente un arc de 7 secondes environ. Or, il paraît difficile de faire des traits d'une épaisseur moindre : il est même très rare de voir dessiner avec ce degré de finesse. Donc sous un angle de 18° d'ouverture au-dessus et au-dessous de Ng_0, soit en tout 36° d'ouverture totale, l'erreur occasionnée par la substitution du cercle osculateur à l'hyperbole elle-même est comparable à l'erreur du trait. On peut donc dire que dans cette région de la courbe, la méthode que nous venons d'exposer fournit une précision égale à celle du meilleur trait exécuté avec la règle et le compas. Pratiquement, cette région pourra être notablement agrandie sans inconvénient.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE ALGÉBRIQUE DES COURBES.

I. — *Équation de la courbe.*

L'hyperbole étoilée étant définie par la figure 2, nous avons les proportions

$$\frac{d}{\sin \omega} = \frac{\rho_n}{\sin \omega_s} = \frac{\rho_s}{\sin \omega_n},$$

$$\sin \omega = \sin \frac{m}{n} \omega_n = \sin \frac{m}{s} \omega_s,$$

$$\sin \omega_s = \sin \frac{s}{n} \omega_n, \qquad \sin \omega_n = \sin \frac{n}{s} \omega_s.$$

Les équations de la courbe sont : au pôle N,

$$\rho_n = d \frac{\sin \frac{s}{n} \omega_n}{\sin \frac{m}{n} \omega_n};$$

au pôle S,

$$\rho_s = d \frac{\sin \frac{n}{s} \omega_s}{\sin \frac{m}{n} \omega_s},$$

qu'on peut mettre sous la forme générale

$$\text{(A)} \qquad \rho = d \frac{u}{v},$$

applicable à l'un et à l'autre pôle et applicable à l'hyperbole développante. Cette forme est très commode pour l'établissement de propriétés générales et pour permettre le passage de l'un à l'autre pôle.

L'équation de l'hyperbole étoilée peut aussi s'écrire :

Au pôle N,

$$(B) \qquad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d}\left(\cos\omega_n - \sin\omega_n \cot\frac{s}{n}\omega_n\right);$$

Au pôle S,

$$(B') \qquad \frac{1}{\rho_s} = \frac{1}{d}\left(\cos\omega_s - \sin\omega_s \cot\frac{n}{s}\omega_s\right).$$

La forme (B) et (B') est plus commode pour certains calculs.

II. — *Discussion de l'équation* (A).

1° Pour $u = 0$; $v = 0$; ρ est indéterminé. L'axe polaire fait partie du lieu. Négligeons cette solution correspondant à $\omega = 0$.

Lorsque ω n'est pas identiquement nul, ce qui correspond au point g où la branche G coupe NS, on peut lever l'indétermination

$$\operatorname{Lim}\rho_n = \operatorname{Lim} d\frac{u_n}{v_n} = d\frac{u'_n}{v'_n} = d\,\frac{\dfrac{s}{n}\cos 0}{\dfrac{m}{n}\cos 0} = d\times\frac{s}{m},$$

$$\operatorname{Lim}\rho_s = \operatorname{Lim} d\frac{u_s}{v_s} = d\frac{u'_s}{v'_s} = d\,\frac{\dfrac{n}{s}\cos 0}{\dfrac{m}{s}\cos 0} = d\times\frac{n}{m}.$$

Nous vérifions le résultat trouvé au Chapitre II. On peut y arriver aussi en remarquant que le rapport du

sinus à l'arc est égal à 1 pour $\omega = 0$

$$\operatorname{Lim}\frac{u_n}{v_n} = \operatorname{Lim}\frac{\frac{s}{n}\omega_n}{\frac{m}{n}\omega_n} = \frac{s}{m},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{u_s}{v_s} = \operatorname{Lim}\frac{\frac{n}{s}\omega_s}{\frac{m}{s}\omega_s} = \frac{n}{m}.$$

2° L'équation (A) ne change pas quand on change ω en $-\omega$; nous vérifions ainsi que la ligne des pôles est un axe de symétrie et cette propriété s'étend à toute la courbe.

3° D'après la forme de l'équation (A), on voit qu'il faudra faire s tours autour du pôle S et n tours autour du pôle N pour construire toute la courbe.

Les vitesses angulaires étant dans le rapport $\frac{s}{n}$, on constate que les rayons vecteurs se retrouveront ensemble à la position initiale après ce nombre de tours.

La discussion ci-dessus n'intéresse pas l'hyperbole développante dont l'équation a été discutée séparément.

4° Points multiples (*voir* tangentes à l'origine).

III. — *Tangentes.*

1° *Équation générale.* — Prenons (A) sous la forme

(1) $$L\rho = Ld - Lu - Lv.$$

La formule générale qui donne l'angle de la tangente

et du rayon vecteur est

$$\tan g \tilde{\varphi} = \frac{\rho}{\rho'},$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\rho'}{\rho} = \cot \tilde{\varphi}.$$

Il suffit de prendre la dérivée de l'équation (1)

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = \cot \tilde{\varphi}.$$

Au pôle N,

$$\cot \tilde{\varphi}_n = \frac{s}{n} \cot \omega_s - \frac{m}{n} \cot \omega;$$

Au pôle S,

$$\cot \tilde{\varphi}_s = \frac{n}{s} \cot \omega_n - \frac{m}{s} \cot \omega.$$

Pour la développante

$$\cot \tilde{\varphi}_n = \frac{1}{\omega} - \cot \omega.$$

2° *Tangentes à l'origine.* — On les obtient en faisant $\rho = 0$ et, par suite,

$$u = 0.$$

Au pôle N, $\sin \frac{s}{n} \omega_n = 0$ donne

$$\frac{s}{n} \omega_n = K\pi, \qquad \omega_n = \frac{nK\pi}{s}.$$

Écartons la solution $K = 0$ qui donne l'axe polaire; il nous reste $(s - 1)$ tangentes deux à deux symétriques par rapport à NS et faisant avec lui les angles

$$\frac{n\pi}{s}, \quad \frac{2n\pi}{s}, \quad \ldots, \quad \frac{n \times (s-1)\pi}{s}.$$

Le pôle N est donc un point multiple d'ordre $(s - 1)$. On a ainsi les tangentes aux branches FF (*fig.* 3).

Le pôle S est un point multiple d'ordre $(n-1)$ ayant pour directions tangentielles

$$\frac{s\pi}{n}, \quad \frac{2s\pi}{n}, \quad \frac{3s\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{s(n-1)\pi}{n}.$$

Remarquons que, des deux nombres s et n, l'un est pair et l'autre impair, puisque leur somme m est un nombre impair. Soit $s = 2t$.

Parmi les directions $\frac{n\pi}{s}, \frac{2n\pi}{s}, \dots$ du pôle N se trouve celle qui a pour valeur $\frac{n \cdot t \cdot \pi}{s} = n\frac{\pi}{2}$ qui est perpendiculaire à l'axe polaire. C'est la tangente à la branche J (*fig.* 3).

Si l'on fait varier s de 1 à $\frac{m-1}{2}$ et n de $\frac{m-1}{2}$ à $(m-1)$, les valeurs de ces deux nombres sont alternativement paires et impaires. Par suite, la branche J passe alternativement par N et par S dans les différentes courbes d'ordre m.

Si m était pair, s et n seraient impairs, sans quoi on réduirait l'ordre de la courbe ; dans ce cas, il n'y a pas de tangente à l'origine parallèle à Oy et, par suite, pas de branche J.

3° *Tangentes parallèles à* NS. — Il n'y a pas de tangentes parallèles à NS ; en effet, il faudrait avoir

$$-\cot\omega_n = \cot\widehat{\varepsilon}_n = \frac{s}{n}\cot\omega_s - \frac{m}{n}\cot\omega,$$

$$-\cot\omega_s = \cot\widehat{\varepsilon}_s = \frac{n}{s}\cot\omega_n - \frac{m}{s}\cot\omega.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, ces équations se réduisent à une seule,

$$s\cot\omega_s - n\cot\omega_n = m\cot\omega = m\,\frac{\cot\omega_s\cot\omega_n - 1}{\cot\omega_s + \cot\omega_n}$$

ou

$$s\cot^2\omega_s - n\cot^2\omega_n = 0.$$

Cette inégalité n'est possible que si l'on a à la fois

$$\cot\omega_s = 0, \qquad \cot\omega_n = 0$$

correspondant à un point à l'infini; mais, même dans ce cas, la tangente, qui se transforme en asymptote perpendiculaire à NS, n'est pas dans les conditions cherchées.

Pour l'hyperbole développante, il faudrait avoir

$$-\cot\omega = \frac{1}{\omega} - \cot\omega, \qquad \frac{1}{\omega} = 0, \qquad \omega = \infty,$$

ce qui n'est pas une solution.

4° *Tangentes perpendiculaires à NS.* — Il faut avoir

$$\tan\omega_n = \cot\tilde{\varepsilon}_n = \frac{s}{n}\cot\omega_s - \frac{m}{n}\cot\omega,$$

$$\tan\omega_s = \cot\tilde{\varepsilon}_s = \frac{n}{s}\cot\omega_n - \frac{m}{s}\cot\omega.$$

Éliminons $\cot\omega$; nous trouvons la condition

(1) $$\frac{\sin 2\omega_s}{\sin 2\omega_n} = \frac{s}{n}.$$

En posant

$$2\omega_s = s\varphi, \qquad 2\omega_n = n\varphi,$$

et en développant par la formule de Moivre, on trouverait une équation entre $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ qui donnerait les valeurs cherchées. Mais on peut trouver immédiatement des valeurs de ω qui conviennent à toutes les hyperboles étoilées. En effet, l'équation (1) serait iden-

tiquement vérifiée si l'on avait à la fois

$$\sin 2\omega_s = 0 = 2 \sin\omega_s \cos\omega_s,$$
$$\sin 2\omega_n = 0 = 2 \sin\omega_n \cos\omega_n.$$

Ces deux équations peuvent être satisfaites de quatre manières différentes que nous allons examiner.

Première combinaison :

$$\sin\omega_s = 0, \qquad \sin\omega_n = 0 \qquad \text{ou} \qquad \omega_s = K\pi, \qquad \omega_n = K'\pi.$$

Or, nous avons toujours

$$\frac{\omega_s}{\omega_n} = \frac{s}{n} = \frac{K}{K'},$$

d'où

$$K' = \frac{nK}{s}.$$

Une première solution est

$$K = K' = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_s = \omega_n = 0.$$

C'est le point g de la branche G.

La première valeur de K qui donnerait pour K' un nombre entier serait s, puisque n et s sont premiers entre eux.

On aurait alors

$$K = s, \qquad K' = n.$$

Or nous avons déjà vu que la courbe se termine après s tours autour de S et n tours autour de N. Nous retombons donc sur le point g.

Cette hypothèse donne donc toujours une solution et une seule.

Deuxième combinaison :

$$\sin\omega_s = 0, \qquad \cos\omega_n = 0$$

ou

$$\omega_s = K\pi, \qquad \omega_n = (2K'-1)\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{s}{n} = \frac{\omega_s}{\omega_n} = \frac{K}{\frac{2K'-1}{2}}, \qquad \frac{s(2K'-1)}{2} = nK.$$

Si s est impair, la chose est impossible, car le second membre de l'équation est entier et le premier ne peut l'être, puisqu'il est le produit de deux nombres impairs divisé par 2.

Si s est pair, posons $s = 2t$,

$$2K'-1 = \frac{nK}{t}.$$

La première valeur entière du second membre aura lieu pour $K = t$, puisque n et t sont premiers entre eux. On a alors

$$2K'-1 = n, \qquad K' = \frac{n-1}{2},$$

valeur qui sera entière, puisque s étant pair, n est impair.

On a ainsi la tangente à la branche J (*fig.* 3).

On verrait comme précédemment que cette hypothèse ne peut pas donner une deuxième solution.

Troisième combinaison :

$$\cos\omega_s = 0, \qquad \sin\omega_n = 0.$$

Ce cas n'est possible que si le précédent donne une impossibilité, et réciproquement.

L'un ou l'autre donne la branche J.

Remarque. — Si m était pair, s et n seraient impairs ; par suite, la deuxième et la troisième combi-

naison seraient également impossibles ; il n'y aurait pas de branche J.

Quatrième combinaison :

$$\cos\omega_s = 0, \qquad \cos\omega_n = 0,$$

$$\omega_s = (2K - 1)\frac{\pi}{2}, \qquad \omega_n = (2K' - 1)\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{s}{n} = \frac{\omega_s}{\omega_n} = \frac{2K - 1}{2K' - 1}.$$

On en tire

$$s(2K' - 1) = n(2K - 1).$$

Si s est pair, le premier membre est pair et le second impair, et réciproquement ; il y a donc impossibilité. Cette combinaison est donc irréalisable.

Remarque. — Si m était pair, la quatrième combinaison serait possible, mais elle donnerait une asymptote perpendiculaire à NS et non une tangente proprement dite.

Pour l'hyperbole développante, l'équation de condition devient

$$\text{tang}\,\omega = \frac{1}{\omega} - \cot\omega, \qquad \text{tang}\,\omega + \cot\omega = \frac{1}{\omega},$$

$$\frac{1}{\sin\omega\cos\omega} = \frac{1}{\omega}, \qquad \frac{1}{2}\sin 2\omega = \omega.$$

Or

$$\frac{1}{2}\sin 2\omega < \sin\omega, \qquad \sin\omega < \omega.$$

Cette équation n'admet que la solution $\omega = 0$ *donnant la tangente au sommet* g_0.

5° *Les hyperboles étoilées n'ont pas de point d'inflexion.* — Il suffit, pour le démontrer, de voir que l'expression $\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''$ ne peut pas s'annuler en changeant de signe.

Prenons l'équation générale sous la forme (B)',

$$\frac{1}{\rho_s} = \frac{1}{d}\left(\cos\omega_s + \sin\omega_s \cot\frac{n}{s}\omega_s\right).$$

Posons

$$\sin\omega_s = z, \qquad \cot\frac{n}{s}\omega_s = w.$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{d}(\cos\omega_s + zw), \qquad \left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{1}{d}[-\sin\omega_s + (zw)'].$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{1}{d}[-\cos\omega_s + (zw)''], \qquad \frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{1}{d}[zw + (zw)''].$$

$\frac{1}{d}$ étant constant, il suffit d'examiner l'équation

$$(1) \qquad zw + (zw)'' = 0.$$

Nous avons

$$(zw)' = z'w + zw', \qquad (zw)'' = z''w + zw'' + 2z'w'.$$

Remarquons que $z'' = -z$ et l'équation (1) devient

$$(2) \qquad zw'' + 2z'w' = 0.$$

Calculons w' et w'' :

$$w' = -\frac{n}{s}\left(1 + \cot^2\frac{n}{s}\omega_s\right) = -\frac{n}{s}(1 + w^2).$$

$$w'' = -\frac{2n}{s} w w' = 2\frac{n^2}{s}(1 + w^2)w.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (2) :

$$(3) \qquad \frac{n}{s}(1 + w^2)\left(\frac{n}{s} z w - z'\right) = 0.$$

Les deux premiers facteurs sont toujours plus grands que o : il suffit donc d'examiner les variations du dernier,

$$\frac{n}{s}\sin\omega_s \cot\frac{n}{s}\omega_s - \cos\omega_s = 0.$$

qui devient

$$\frac{\operatorname{tang} \omega_s}{\operatorname{tang} \omega_n} = \frac{s}{n},$$

équation qui n'est possible que pour $\omega_s = \omega_n = 0$, c'est-à-dire au point g.

Examinons s'il y a variation en ce point :

$\cos \omega_s$ ne change pas de signe quand on change ω_s en $-\omega_s$:

$\sin \omega_s$ et $\cot \frac{n}{s} \omega_s$ changent tous deux, mais leur produit reste le même. Donc, en définitive, il n'y a pas de variation ; il ne peut y avoir inflexion.

Nous avons vu que cette propriété n'est pas applicable à l'hyperbole développante, dont l'équation ne peut se mettre sous la forme (B).

IV. — *Asymptotes.*

1° *Directions asymptotiques.* — Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$\rho = 0.$$

Pour le pôle S,

$$\sin \frac{m}{s} \omega_s = 0, \qquad \frac{m}{s} \omega_s = \mathrm{K}\pi, \qquad \omega_s = \frac{s}{m} \mathrm{K}\pi.$$

Excluons la solution $\mathrm{K} = 0$ qui donne l'axe polaire ; il reste $(m-1)$ directions asymptotiques.

$$\frac{s\pi}{m}, \quad \frac{2s\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \frac{s(m-1)\pi}{m}.$$

Pour le pôle N, on aurait les mêmes directions sous la forme

$$\frac{n\pi}{m}, \quad \frac{2n\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \frac{n(m-1)\pi}{m}.$$

Ces directions forment les rayons vecteurs d'un polygone régulier de 2 m côtés, l'un des rayons étant NS.

2° *Construction des asymptotes.* — Soit α une des valeurs trouvées ci-dessus. L'équation de l'asymptote correspondante sera

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{r}\right)' \sin(\omega - \alpha).$$

Formons $\left(\frac{1}{r}\right)'$

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{d}\,\frac{v}{u}, \qquad \left(\frac{1}{r}\right)' = \frac{1}{d}\,\frac{uv' - vu'}{u^2}.$$

Pour $\omega = \alpha$, au pôle S,

$$v = 0, \qquad v'_s = \frac{m}{s}\cos s \alpha = \mp\frac{m}{s}, \qquad \left(\frac{1}{r}\right)' = \mp\frac{1}{d}\,\frac{\frac{m}{s}}{\sin\frac{n}{s}\omega_s}.$$

L'équation de l'asymptote devient

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \pm\frac{1}{d}\times\frac{m}{s\sin\frac{n}{s}\omega_s}\sin(\omega_s - \alpha).$$

Cherchons le point a où elle coupe l'axe polaire $\omega_s = 0$. Soit δ_s le rayon vecteur de ce point

$$\frac{1}{\delta_s} = \pm\frac{1}{d}\,\frac{m}{s\sin\frac{n}{s}\omega_s}(-\sin\alpha),$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\delta_s} = \mp\frac{1}{d}\,\frac{m}{s}\,\frac{\sin\frac{s\mathrm{K}\pi}{m}}{\sin\frac{n}{s}\frac{s\mathrm{K}\pi}{m}} = \mp\frac{1}{d}\,\frac{m}{s}\,\frac{\sin\frac{s\mathrm{K}\pi}{m}}{\sin\frac{n\mathrm{K}\pi}{m}}.$$

Or, on a identiquement

$$\frac{s\mathrm{K}\pi}{m} + \frac{n\mathrm{K}\pi}{m} = \mathrm{K}\pi, \qquad \sin\frac{s\mathrm{K}\pi}{m} = \mp\sin\frac{n\mathrm{K}\pi}{m}.$$

L'équation (2) se réduit donc à

$$\frac{1}{\delta_s} = \cdot\frac{1}{d}\cdot\frac{m}{s} \text{ [illegible]}, \qquad \delta_s = \frac{s}{m}\,d$$

On voit par là :

1° Que cette valeur est indépendante de α et que, par suite, toutes les asymptotes passent par un même point a que nous avons nommé *centre asymptotique;*

2° Que ce centre asymptotique situé sur NS est symétrique du point g par rapport à Oy (*fig.* 3).

V. — *Propriété caractéristique des hyperboles étoilées.*

Tout cercle passant par les pôles est coupé par une hyperbole étoilée d'ordre m suivant un polygone régulier ou étoilé de m côtés, dont un des sommets est en S ou en N.

C'est cette propriété qui a fait donner aux courbes leur dénomination.

Prenons deux axes rectangulaires passant en S. Un cercle passant par les pôles a pour équation

$$x^2 + y^2 - dx - \lambda y = 0,$$

λ étant variable. En coordonnées polaires, cela donne

$$\rho = d\cos\omega - \lambda\sin\omega.$$

Éliminons ρ entre cette équation et l'équation (A) de la courbe

$$(d\cos\omega + \lambda\sin\omega)\sin\frac{n-s}{s}\,\omega = d\sin\frac{n}{s}\,\omega.$$

Ordonnons en d et λ ; nous trouvons après réductions

$$-d\cos\left(\frac{n-s}{s}\right)\omega = \lambda\sin\left(\frac{n-s}{s}\right)\omega, \qquad \operatorname{tang}\frac{m}{s}\omega = -\frac{d}{\lambda}\cdot$$

Soit α une des valeurs de $\frac{m}{s}\omega$ donnée par cette formule. Toutes les autres sont données par

$$\frac{m}{s}\omega_s = \mathrm{K}\pi + \alpha, \qquad \omega_s = \frac{s\mathrm{K}\pi}{m} + \frac{s\alpha}{m}\cdot$$

Pour un même cercle, λ est constant et par suite $\frac{\alpha}{m}\cdot$ Donc toutes les valeurs des angles formés par les rayons vecteurs des points d'intersection du cercle et de la courbe sont comprises dans la formule

$$\omega_s = \frac{s\mathrm{K}\pi}{m} + \text{const.}$$

Ces angles étant égaux et le point S étant sur la circonférence, ils sous-tendent des arcs égaux sur cette dernière. C. Q. F. D.

Si $\lambda = 0$, une des valeurs de α est nulle et $\omega = \frac{s\mathrm{K}\pi}{m}$; le polygone étoilé ou régulier a son sommet au pôle par lequel passe la branche J. Ce cas correspond à $\omega = \frac{\pi}{2}\cdot$

Corollaire I. — Toutes les hyperboles d'ordre m qui ont leur pôle impair du même côté se coupent suivant un polygone régulier de m côtés, inscrit au cercle décrit sur NS comme diamètre.

Corollaire II. — Connaissant un point d'une hyperbole étoilée, on peut immédiatement en construire $(m-1)$ autres points, en décrivant le cercle qui passe par le point donné et par les pôles.

On peut utiliser cette propriété pour construire toute la courbe en partant de la branche G seulement.

VI. — *Équation des hyperboles étoilées en coordonnées rectangulaires.*

Une hyperbole étoilée d'ordre m est représentée en coordonnées rectangulaires par une équation algébrique de degré m en x et y, qui se réduit au degré (m — 1) par la suppression du facteur y qui correspond à la solution donnée par l'axe polaire.

Écrivons l'équation de la courbe sous la forme (B)

$$(1) \qquad d = \rho\cos\omega - \rho\sin\omega\cot\frac{n}{s}\omega.$$

Les formules de transformation pour passer en coordonnées rectangulaires sont

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega.$$

Cherchons à ramener (1) à une forme telle qu'elle soit homogène en $\rho\cos\omega$, $\rho\sin\omega$ et d; après quoi, l'élimination se fera par simple substitution.

Écrivons-la sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\cos\frac{n}{s}\omega}{\sin\frac{n}{s}\omega} = \frac{d-\rho\cos\omega}{\rho\sin\omega}.$$

Considérons, d'autre part, les identités suivantes que

donne la formule de Moivre :

$$\cos n\omega = \cos s\left(\frac{n\omega}{s}\right)$$

$$= \cos^s \frac{n\omega}{s} - \frac{s(s-1)}{1.2}\cos^{s-2}\frac{n\omega}{s}\sin^2\frac{n\omega}{s}\ldots,$$

$$\sin n\omega = \sin s\left(\frac{n\omega}{s}\right) = s\cos^{s-1}\frac{n\omega}{s}\sin\frac{n\omega}{s}$$

$$-\frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\cos^{s-3}\frac{n\omega}{s}\sin^3\frac{n\omega}{s} - \ldots.$$

On obtient, en les divisant, l'identité (3) :

$$(3)\qquad \frac{\cos n\omega}{\sin n\omega}$$

$$= \frac{\cos^s\frac{n\omega}{s} - \frac{s(s-1)}{1.2}\cos^{s-2}\frac{n\omega}{s}\sin^2\frac{n\omega}{s} - \ldots}{s\cos^{s-1}\frac{n\omega}{s}\sin\frac{n\omega}{s} - \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\cos^{s-3}\frac{n\omega}{s}\sin^3\frac{n\omega}{s} - \ldots}.$$

Le second membre de cette identité est homogène et de degré s tant au numérateur qu'au dénominateur, par rapport à $\cos\frac{n\omega}{s}$ et $\sin\frac{n\omega}{s}$.

On peut donc y remplacer ces variables par leurs quantités proportionnelles $(d - \rho\cos\omega)$ et $\rho\sin\omega$ contenues dans (2).

Effectuons cette opération et chassons les dénominateurs. Nous obtiendrons, en faisant passer tous les termes dans le premier membre, une équation de degré s homogène en ρ et d.

Le coefficient de ρ^s sera

$$\sin n\omega\left[\cos^s\omega - \frac{s(s-1)}{2}\cos^{s-2}\omega\sin^2\omega + \ldots\right]$$

$$-\cos n\omega\left[s\cos^{s-1}\omega\sin\omega - \ldots\right],$$

qui peut s'écrire

$$\sin n\omega\cos s\omega - \cos n\omega\sin s\omega = \sin(n-s)\omega = \sin m\omega.$$

On trouverait de même pour le coefficient de ρ^{s-1} le terme

$$-s[\sin n\omega\cos(s-1)\omega + \cos n\omega\sin(s-1)\omega] = \sin(m-1)\omega.$$

L'équation (2) combinée avec l'identité (3) donne donc

$$(4)\quad \rho^s\sin m\omega - \frac{s}{1}d\rho^{s-1}\sin(m-1)\omega + \ldots \pm d^s\sin(m-s)\omega = 0.$$

Multiplions par ρ^n tous les termes de cette équation ; nous aurons la forme cherchée pour passer facilement en coordonnées rectangulaires, après avoir développé les sinus qui forment les coefficients des différentes puissances de ρ.

Il y a lieu de remarquer que la multiplication par ρ^n n'introduit pas de solution étrangère à la question, car nous exprimons seulement par là que le pôle S est un point multiple d'ordre n, ce qui est une propriété connue de la courbe.

Sur l'équation (5) ainsi obtenue,

$$(5)\quad \rho^m\sin m\omega - \frac{s}{1}d\rho^{m-1}\sin(m-1)\omega - \ldots \pm d^s\rho^n\sin(m-s)\omega = 0,$$

nous reconnaissons facilement quelques-unes des propriétés connues des hyperboles étoilées : directions asymptotiques, tangentes à l'origine.

Si, dans l'équation (4), nous divisons tout par d^s, nous trouvons une équation en $\left(\frac{\rho}{d}\right)$ que nous pouvons remplacer par sa valeur tirée de (A), $\dfrac{\sin\frac{n}{s}\omega}{\sin\frac{m}{s}\omega}$. Il en résultera une identité entre les fonctions $\sin\omega$ et $\cos\omega$ et les mêmes fonctions des parties fractionnaires de ω.

VII. — *Calcul du rayon de courbure en un point.*

L'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires est

$$R = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''} = \frac{\rho^3\left(1+\frac{\rho'^2}{\rho^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2\left(1+2\frac{\rho'^2}{\rho^2}-\frac{\rho''}{\rho}\right)}.$$

Remplaçons $\frac{\rho'}{\rho}$ par sa valeur $\cot\varpi$:

$$R = \frac{\rho(1+\cot^2\varpi)^{\frac{3}{2}}}{1+2\cot^2\varpi-\frac{\rho''}{\rho}} = \frac{\rho}{\sin^3\varpi\left(1+2\cot^2\varpi-\frac{\rho''}{\rho}\right)}.$$

Calculons $\frac{\rho''}{\rho}$:

$$\rho' = \rho\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right),$$

$$\rho'' = \rho'\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)+\rho\left[\left(\frac{u''}{u}-\frac{v''}{v}\right)-\left(\frac{u'^2}{u^2}-\frac{v'^2}{v^2}\right)\right],$$

$$\frac{\rho''}{\rho} = \left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)\left[\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)-\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}\right)\right]+\frac{u''}{u}-\frac{v''}{v},$$

$$\frac{\rho''}{\rho} = -2\cot\varpi\frac{v'}{v}+\frac{u''}{u}-\frac{v''}{v}.$$

Pour le pôle N,

$$\frac{u''}{u} = -\frac{s^2}{n^2}, \qquad \frac{v''}{v} = -\frac{m^2}{n^2},$$

$$\frac{\rho''}{\rho} = -2\cot\varpi\frac{v'}{v}-1-\frac{2s}{n},$$

$$(1) \qquad R = \frac{\rho_n}{2\sin^3\varpi_n\left[1+\cot\varpi_n\left(\cot\varpi_n+\frac{v'}{v}\right)+\frac{s}{n}\right]}.$$

Nous avons ainsi une première expression de ce rayon.

Nous pouvons la transformer, parce que l'expression

de $\cot\varpi_n$ peut s'écrire

$$\frac{v'}{v} = \frac{u'}{u} - \cot\varpi_n.$$

$$R = \frac{\rho_n}{2\sin^3\varpi_n\left(\cot\varpi\,\frac{n}{n} - \frac{s}{n}\right)},$$

$$R = \frac{n\rho_n}{2s\sin^3\varpi_n(\cot\varpi_n\cot\omega_s - 1)}.$$

Chassons les dénominateurs des cotangentes.

$$(2) \qquad R = \frac{n\rho_n}{2s\sin^2\varpi_n\cos(\varpi_n - \omega_s)}.$$

Cette deuxième expression peut encore se simplifier à l'aide de la relation entre les angles ϖ et ω mise sous la forme

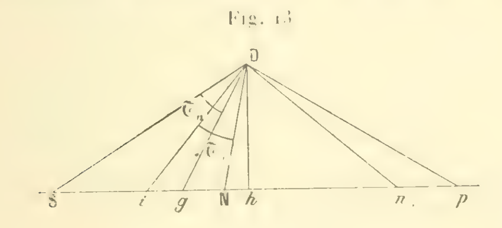
$$\frac{n\sin\omega_s}{s\sin\varpi_n} = \frac{\sin\omega_n}{\sin\varpi_n};$$

(2) s'écrit alors

$$(3) \qquad R = \frac{\rho_n\sin\omega_s}{2\sin\varpi_n\sin\varpi_s\cos(\varpi_n - \omega_s)}.$$

Interprétons géométriquement ce résultat (*fig.* 13).

Fig. 13



$\rho_n \sin\omega_n$ est la cote du point D, soit Dh

$$R = \frac{Dh}{\cos(\varpi_n - \omega_s)} \times \frac{1}{2\sin\varpi_s\sin\varpi_n}.$$

D'après les propriétés connues de la tangente et de la radiale, l'angle SDg est égal à ϖ_n.

Dans le triangle S D g, l'angle DgN est égal à la somme des angles de base ϖ_n et ω_s.

$$\varpi_n + \omega_s = \mathrm{D}g\mathrm{N}.$$

Si Dp est la coradiale, l'angle hDp est égal à DgN, puisque ces angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires ; donc

$$\varpi_n + \omega_s = \mathrm{D}g\mathrm{N} = h\mathrm{D}p.$$

Dans le triangle rectangle hDp, on a donc

$$\frac{\mathrm{D}h}{\cos(\varpi_n + \omega_s)} = \mathrm{D}p.$$

et le rayon cherché a pour formule définitive

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{D}p}{2 \sin\varpi_n \sin\varpi_s}.$$

C'est la formule que nous avons utilisée au Chapitre II pour la construction du centre de courbure.

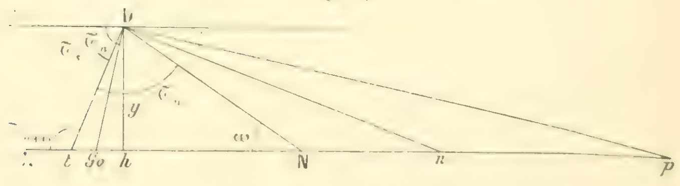
Le rayon de courbure de l'hyperbole développante peut se mettre aussi sous cette forme. Partons de la formule (1) *dans laquelle nous ferons* $s = 0$.

$$\mathrm{R} = \frac{\rho}{\sin^3\varpi_n} \, \frac{1}{2\cot\varpi_n(\cot\varpi_n - \cot\omega)},$$

(4) $$\mathrm{R} = \frac{\rho \sin\omega}{2\sin\varpi_n \cos\varpi_n \sin(\varpi_n - \omega)}.$$

$$\rho\sin\omega = \mathrm{D}h = y \qquad (\textit{fig. } 14),$$

Fig. 14.



$$\frac{y}{\cos\varpi_n} = \mathrm{D}p. \qquad \varpi_n - \omega = \mathrm{D}t\mathrm{N} \text{ angle extérieur de } \mathrm{ND}t.$$

$$\mathrm{D}tx = \pi - \varpi_s. \qquad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{D}p}{2\sin\varpi_n \sin\varpi_s}.$$

Valeur du rayon de courbure pour $\omega = 0$. — Pour $\omega_n = \omega_s = 0$, l'expression de R est indéterminée. Proposons-nous de lever l'indétermination.

1° Pour l'hyperbole étoilée, partons de (3) :

$$R = \frac{\rho_n}{2\sin\widetilde{\varepsilon}_s \sin\widetilde{\varepsilon}_n} \times \frac{\sin\omega_n}{\cos(\widetilde{\varepsilon}_n + \omega_s)}$$

$$= \frac{\rho_n}{2\sin\widetilde{\varepsilon}_s \sin\widetilde{\varepsilon}_n} \times \frac{1}{\dfrac{\cos\widetilde{\varepsilon}_n \cos\omega_s}{\sin\omega_n} - \sin\widetilde{\varepsilon}_n \dfrac{\sin\omega_s}{\sin\omega_n}}.$$

A la limite, cette expression devient égale au rayon de courbure en g.

$$(5) \qquad R_g = \frac{sd}{2m} \times \text{Lim} \frac{1}{\dfrac{\cos\widetilde{\varepsilon}_n}{\sin\omega_n}\cos\omega_s - \sin\widetilde{\varepsilon}_n \dfrac{\sin\omega_s}{\sin\omega_n}}.$$

L'indétermination ne porte plus que sur le dénominateur du second facteur.

Le terme négatif de celui-ci a évidemment pour limite $\frac{s}{n}$.

Cherchons celle du terme positif.

$$\text{Lim} \frac{\cos\widetilde{\varepsilon}_n}{\sin\omega_n} = \text{Lim} \frac{\sin \text{ND}n}{\sin \text{DN}n} \qquad (\textit{fig. } 13).$$

En effet,

$$\text{ND}n + t\text{DN} = 90^\circ \qquad \text{et} \qquad t\text{DN} = \widetilde{\varepsilon}_n,$$

d'où

$$\cos\widetilde{\varepsilon}_n = \sin \text{ND}n.$$

Dans le triangle NnD,

$$\frac{\sin \text{ND}n}{\sin \text{DN}n} = \frac{\text{N}n}{\text{D}n},$$

$$\text{Lim N}n = \text{Lim D}n - \text{Lim}\,\rho_n = R_g - \frac{s}{m}d.$$

Donc

$$\text{Lim}\,\frac{\sin \text{ND}n}{\sin \text{DN}n} = \frac{R_g - \frac{s}{m}d}{R_g}.$$

La relation (5) devient

$$R_g = \frac{sd}{2m} \times \frac{R_g}{R_g - \frac{s}{m}d - \frac{s}{n}R_g},$$

et, après réduction,

$$(a) \qquad R_g = \frac{3snd}{2m(n-s)}.$$

2° *Pour l'hyperbole développante, partons de l'équation* (4), *dans laquelle nous remplacerons* $\sin(\tau_n + \omega)$ *par son égal* $\sin \tau_s$ (*fig.* 14).

Remarquons aussi que

$$\sin\omega = \sin \text{DN}n$$

et que

$$\cos\tau = \sin \text{D}n\text{N}.$$

Le rayon de courbure en g_0 *sera*

$$R_{g_0} = \text{Lim}\,\frac{\rho}{2\sin\tau_n \sin\tau_s} \times \text{Lim}\,\frac{\sin \text{DN}n}{\sin \text{D}n\text{N}}.$$

$$(6) \qquad R_{g_0} = \frac{1}{2}d\,\text{Lim}\,\frac{\text{D}n}{\text{N}n},$$

$$\text{Lim}\,\text{D}n = R_{g_0}, \qquad \text{Lim}\,\text{N}n = \text{Lim}\,\text{D}n - \text{Lim}\,\rho_n = R_{g_0} - d.$$

(6) *devient*

$$R_{g_0} = \frac{1}{2}d \times \frac{R_{g_0}}{R_{g_0} - d},$$

et, après réduction,

$$(b) \qquad R_{g_0} = \frac{3}{2}d.$$

Nous retrouvons en (*a*) et (*b*) les formules que nous avons établies géométriquement dans les Chapitres II et III.

RÉSUMÉ ET CONCLUSION.

Nous ne saurions mieux résumer les résultats obtenus qu'en discutant les objections auxquelles cette théorie a donné lieu :

Première objection. — *La mesure des angles par l'arc présente évidemment des inconvénients au point de vue philosophique et donne souvent lieu, dans les traités de Géométrie, à des énoncés vicieux.*

Mais, au lieu de recourir à des segments de droite comme mesures auxiliaires des angles, ainsi que cela a lieu au Chapitre III, pourquoi ne pas les comparer directement entre eux?

En effet, la mesure d'une longueur suppose qu'on sait définir deux longueurs égales ainsi que la somme de deux longueurs ; or, on peut procéder de même pour les angles, puisqu'on sait ce qu'on doit entendre par angles égaux ou par somme de deux angles.

Donc, la mesure des angles, reposant exactement sur les mêmes bases que celle des longueurs est, en soi, une théorie aussi parfaite (ou aussi imparfaite) que celle-ci. Il n'y a donc pas un grand intérêt philosophique à ramener l'une à l'autre.

Réponse. — Quand il s'agit de faire choix de l'unité

d'une grandeur, l'intérêt pratique prime l'intérêt philosophique.

Or, pratiquement, il y a intérêt à adopter pour unité d'angle une longueur telle que nous l'avons définie aux articles IX et X du Chapitre III, parce que, en la définissant ainsi, elle se rangera parmi les unités du système métrique, où, seule, elle fait défaut.

Nous ne discuterons pas les avantages et les inconvénients des bases adoptées pour le système métrique ; nous nous contenterons de les rappeler :

1° Les unités des divers ordres dérivent de l'unité principale d'après la loi décimale ;

2° Les unités principales dérivent du mètre.

Le besoin de se rapprocher du système métrique pour fixer l'unité d'angle se fait si bien sentir en pratique chaque fois qu'il faut en mesurer un grand nombre, que certaines unités, comme le grade, ont été choisies de manière à réaliser la première condition, d'autres ont été inventées pour se rapprocher de la seconde. C'est ainsi que les pentes ont été évaluées en millimètres par mètre et que les hausses de l'Artillerie ont été graduées en millimètres. La Trigonométrie elle-même n'est qu'une représentation rectiligne des angles.

L'emploi de l'unité proposée amènera donc de grandes simplifications et donnera de grandes facilités pour le calcul. D'autre part, la comparaison directe des angles conduit à une méthode stérile, si l'on n'a pas recours aux hyperboles étoilées. Or, nous allons voir que les hyperboles étoilées sont moins commodes que l'hyperbole développante qui forme la caractéristique de notre système.

Deuxième objection. — *La première objection*

étant supposée admise, on en conclut que les hyperboles étoilées sont plus intéressantes, au point de vue scientifique, que l'hyperbole développante.

Réponse. — Les hyperboles étoilées permettent, comme l'hyperbole développante, d'effectuer la division de l'angle ; mais il faut, pour cela, réaliser l'une des conditions suivantes :

1° Soit posséder un appareil qui permette de tracer une hyperbole étoilée quelconque d'un mouvement continu. Or, si cet appareil est réalisable, il n'a pas été effectivement construit ;

2° Soit utiliser une abaque comprenant un assez grand nombre de courbes, pour que l'interpolation soit possible entre deux d'entre elles.

Cette dernière méthode manque d'élégance et même de précision. Cet inconvénient disparaît si l'on remplace toutes les courbes de l'abaque par une ligne unique : c'est ce qu'on obtient avec l'hyperbole développante.

Mais la supériorité de cette courbe ne s'arrête pas là, car elle permet d'effectuer non seulement la division, mais encore toutes les opérations sur les angles, en ramenant le problème à des opérations de même nature exécutées sur des segments de droite.

Troisième objection. — *Du moment qu'on admet, comme pour l'hyperbole développante, l'introduction d'une courbe transcendante une fois tracée, la question de trouver deux longueurs dont le rapport soit celui des angles donnés n'offre aucune difficulté. La spirale d'Archimède ($\rho = a\omega$) employée entre $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$ résout aussi la question.*

L'hyperbole développante n'est donc pas supé-

rieure à la spirale ou à toute autre courbe transcendante qu'on pourrait choisir, et il n'y a pas d'invention dans le fait d'évaluer le rapport de deux angles à l'aide d'une courbe transcendante qu'on coupe par une ou plusieurs droites.

Réponse. — En réponse à ce dernier paragraphe, devrons-nous nous excuser auprès du lecteur de ce que le procédé proposé est trop simple?

Il est indéniable que, même avant l'invention de l'imprimerie, Archimède aurait pu faire reproduire sa spirale à l'aide de plaques gravées ou d'une règle courbe, et donner ainsi à la théorie de la mesure des angles la forme que nous proposons. Pourquoi ne l'a-t-il fait?

Y a-t-il lieu, pour l'expliquer, de rééditer l'apologue de l'œuf de Christophe Colomb, ou bien faut-il incriminer ce fâcheux préjugé en vertu duquel on a cru longtemps pouvoir résoudre tous les problèmes avec la règle et le compas?

Quelle que soit la réponse à ce point d'histoire, nous n'avons plus aujourd'hui les mêmes raisons de rester dans cette voie, puisque l'impuissance de la règle et du compas dans certaines questions est formellement reconnue.

L'emploi d'une courbe étant admis, quelle est celle qui donnera les meilleurs résultats? A notre avis, c'est l'hyperbole développante parce qu'elle est la plus simple et parce qu'elle donnera les tracés les plus précis.

Mais il y a là une question dans le détail de laquelle nous n'entrerons pas. Ce qui importe, comme nous le disions en commençant, c'est de substituer à une théorie pleine de contradictions et de lacunes une

méthode rationnelle qui constitue un retour aux procédés usuels de la Géométrie et de l'Arithmétique.

Ce résultat que nous poursuivons depuis 1904 sera peut-être retardé par la difficulté qu'on éprouve toujours à abandonner de vieilles habitudes et par cet état d'esprit dont Schopenhauer disait : « Sitôt qu'il apparaît au monde une vérité nouvelle, on s'y oppose le plus longtemps possible, et l'on résiste même quand on est presque convaincu. »

Mais quoi qu'il arrive, quand une erreur est signalée, elle est forcée de disparaître. Le système métrique est connu depuis plus d'un siècle et n'est pas encore adopté partout. Faut-il s'étonner que des théories et des préjugés vieux de plusieurs siècles cèdent si difficilement la place à une théorie nouvelle ?

L'auteur recevra avec plaisir communication de toute objection nouvelle élevée contre l'utilité des théories qui précèdent ; il y répondra, s'il y a lieu, dans une édition spéciale.

Écrire à cet effet, à Toulon, route de la Valette, n° 213, avant le 1er octobre 1911, et après cette date, à Paris, rue d'Alésia, 39.

TABLE DES MATIÈRES.

Nota. — Les articles marqués d'une *, qui constituent le fond de la théorie nouvelle, peuvent être lus sans qu'il soit nécessaire de connaître les mathématiques supérieures.

[illegible] Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, [illegible].

47700 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.